Тренировочная олимпиада

1. Существуют ли различные натуральные a, b, большие 1, такие, что

$$\text{НОД}(a, b) = d,$$

$$\text{НОД}(a+1, b+1) = d+1,$$

$$\text{НОД}(a+2, b+2) = d+2,$$

$$\ldots$$

$$\text{НОД}(a+2025, b+2025) = d+2025$$

для некоторого натурального d?

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны AD и DC в точках P и Q соответственно. Описанная окружность треугольника ADC пересекает стороны AB и BC в точках S и R соответственно. Оказалось, что четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм. Докажите, что $ABCD$ — также параллелограмм.

3. Шахматная доска 8×8 разбита на доминошки. На каждой из них записали количество доминошек разбиения, имеющих с ней более одной общей точки. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доминошках?

4. Известно, что квадратный трехчлен

$$(b+c)x^2 + (a+c)x + (a+b)$$

не имеет корней. Докажите, что $4ac - b^2 \leqslant 3a(a+b+c)$.

5. Дано натуральное число n. На доске выписано $n^2 + n$ чисел, при этом каждое вещественное число встречается на доске не более чем $\frac{n^2+n}{2}$ раз. Докажите, что все числа с доски можно разбить на $n+1$ группу, по n чисел в каждой так, чтобы суммы чисел во всех группах были различными.