

## Комбинаторика

1. Вершины правильного 100-угольника покрашены в 10 цветов. Докажите, что у этого 100-угольника найдутся 4 вершины, являющиеся вершинами прямоугольника и покрашенные не более чем в два различных цвета.
2. Числа  $1, 2, \dots, n$  в некотором порядке расставлены в ряд. С ними разрешается проделывать такую операцию: выбрать две пары соседних элементов, не имеющих общих членов, и поменять эти пары местами ( $\dots ab \dots cd \dots \rightarrow \dots cd \dots ab \dots$ ). Всегда ли можно за несколько таких операций получить монотонный (возрастающий или убывающий) набор чисел, если (a)  $n = 2025$ ; (b)  $n = 2026$ ?
3. На клетчатой доске  $300 \times 300$  по линиям сетки расположено несколько попарно несовпадающих кораблей 1300 (неизвестно, сколько именно). Разрешается сделать  $k$  выстрелов по любым клеткам, после чего будет объявлено, какие именно выстрелы попали в какой-то корабль. По этим результатам нужно определить местоположение всех кораблей. При каком наименьшем  $k$  это гарантированно удастся?
4. Лёша и Артём играют в игру «Морской бой-2000». На доске  $1 \times 2000$  они по очереди ставят на свободные клетки доски букву «S» или «O», начинает Лёша. Выигрывает тот, кто первым получает слово «SOS». Каков результат игры при правильной игре?
5. Есть  $k$  серебряных и  $n$  золотых монет. Все серебряные монеты весят одинаково, все золотые тоже одинаково и легче серебряных. Также есть двухчашечные весы, которые всегда показывают неправильный результат (могут показать любой из двух).
  - (a) Пусть  $k = 1$ . При каких  $n$  можно гарантированно найти серебряную монету?
  - (b) Пусть  $k = 1$ . Какое наибольшее количество золотых монет можно гарантированно определить при остальных  $n$ ?
  - (c) Пусть  $k$  и  $n$  — произвольные натуральные числа. Какое наибольшее количество монет каждого типа можно гарантированно определить?
6. Какое наибольшее количество попарно непересекающихся пар из элементов множества  $1, 2, \dots, 3000$  можно выбрать так, чтобы суммы элементов в парах были различными числами, не превосходящими 3000?