

Комбинаторика

1. Вершины правильного 100-угольника покрашены в 10 цветов. Докажите, что у этого 100-угольника найдутся 4 вершины, являющиеся вершинами прямоугольника и покрашенные не более чем в два различных цвета.
2. Числа $1, 2, \dots, n$ в некотором порядке расположены в ряд. С ними разрешается проделывать такую операцию: выбрать две пары соседних элементов, не имеющих общих членов, и поменять эти пары местами ($\dots ab \dots cd \dots \rightarrow \dots cd \dots ab \dots$). Всегда ли можно за несколько таких операций получить монотонный (возрастающий или убывающий) набор чисел, если (a) $n = 2025$; (b) $n = 2026$?
3. На клетчатой доске 300×300 по линиям сетки расположено несколько попарно несоприкасающихся кораблей 1300 (неизвестно, сколько именно). Разрешается сделать k выстрелов по любым клеткам, после чего будет объявлено, какие именно выстрелы попали в какой-то корабль. По этим результатам нужно определить местоположение всех кораблей. При каком наименьшем k это гарантированно удастся?
4. Лёша и Артём играют в игру «Морской бой-2000». На доске 1×2000 они по очереди ставят на свободные клетки доски букву «S» или «O», начинает Лёша. Выигрывает тот, кто первым получает слово «SOS». Каков результат игры при правильной игре?
5. Есть k серебряных и n золотых монет. Все серебряные монеты весят одинаково, все золотые тоже одинаково и легче серебряных. Также есть двухчашечные весы, которые всегда показывают неправильный результат (могут показать любой из двух).
 - (a) Пусть $k = 1$. При каких n можно гарантированно найти серебряную монету?
 - (b) Пусть $k = 1$. Какое наибольшее количество золотых монет можно гарантированно определить при остальных n ?
 - (c) Пусть k и n — произвольные натуральные числа. Какое наибольшее количество монет каждого типа можно гарантированно определить?
6. Какое наибольшее количество попарно непересекающихся пар из элементов множества $1, 2, \dots, 3000$ можно выбрать так, чтобы суммы элементов в парах были различными числами, не превосходящими 3000?