Разная тч

1. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме кубов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^3+2^3+2^3$. Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

2. Даны натуральные числа a, b и c такие, что $ab+9b+81$ и $bc+9c+81$ делятся на 101. Докажите, что тогда и $ca+9a+81$ тоже делится на 101.

3. Пусть $a_1, \ldots, a_p$ — конечная арифметическая прогрессия с разницей, не кратной p (p – простое). Докажите, что существует некоторый член a_k, такой что $a_k + a_1 a_2 \ldots a_p$ делится на p

4. Петя прибавил к натуральному числу N натуральное число M и заметил, что сумма цифр у результата та же, что и у N. Тогда он снова прибавил M к результату, потом – ещё раз, и т. д. Обязательно ли он когда-нибудь снова получит число с той же суммой цифр, что и у N?

5. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$.

6. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + ... + P(n)$ делится на k.

7. Докажите, что для любого натурального n найдётся натуральное k такое, что $51^k - 17$ делится на 2^n.

8. Несократимые дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ записали в виде чисто периодических десятичных дробей (без предпериода). Оказалось, что любая конечная последовательность подряд стоящих цифр, встречающаяся в первой десятичной дроби после запятой, встречается и во второй (тоже подряд и тоже после запятой). Докажите, что $b = d$.