

Разнобой по геометрии.

- Существует ли треугольник, в котором одна сторона равна какой-то из его высот, другая — какой-то из биссектрис, а третья — какой-то из медиан?
- На окружности с диаметром AB выбраны точки C и D . XY — диаметр окружности, проходящий через середину K хорды CD . Точка M — проекция X на AC , точка N — проекция Y на BD . Докажите, что точки M, N, K лежат на одной прямой.
- На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка C_1 . Точки A_1, B_1 на лучах BC и AC таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C_2 . Докажите, что все прямые C_1C_2 проходят через одну точку.
- Окружности ω_α , ω_β и ω_γ имеют одинаковые радиусы и касаются сторон углов A , B и C треугольника ABC соответственно. Окружность Ω касается внешним образом всех трех окружностей ω_α , ω_β и ω_γ . Докажите, что центр окружности Ω лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .
- Пусть A_1 — основание биссектрисы угла A треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности. Пусть XY — произвольная хорда описанной окружности треугольника BIC , проходящая через A_1 . Докажите, что AA_1 — биссектриса угла XYA .
- На плоскости дан треугольник ABC . Через произвольную точку D плоскости провели прямые l_a, l_b и l_c , такие что $l_a \perp AD, l_b \perp BD$ и $l_c \perp CD$. Точка A_1 — пересечение l_a и прямой BC , B_1 — пересечение l_b и AC , C_1 — пересечение l_c и AB .
 - Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 лежат на одной прямой.
 - Докажите, что A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.
- Три равных правильных тетраэдра имеют общий центр. Могут ли все грани многогранника, являющегося их пересечением, быть равны?