

## Разнобой по геометрии.

1. Существует ли треугольник, в котором одна сторона равна какой-то из его высот, другая — какой-то из биссектрис, а третья — какой-то из медиан?
2. На окружности с диаметром  $AB$  выбраны точки  $C$  и  $D$ .  $XY$  — диаметр окружности, проходящий через середину  $K$  хорды  $CD$ . Точка  $M$  — проекция  $X$  на  $AC$ , точка  $N$  — проекция  $Y$  на  $BD$ . Докажите, что точки  $M, N, K$  лежат на одной прямой.
3. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взята произвольная точка  $C_1$ . Точки  $A_1, B_1$  на лучах  $BC$  и  $AC$  таковы, что  $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$ . Прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $C_2$ . Докажите, что все прямые  $C_1C_2$  проходят через одну точку.
4. Окружности  $\omega_\alpha, \omega_\beta$  и  $\omega_\gamma$  имеют одинаковые радиусы и касаются сторон углов  $A, B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  соответственно. Окружность  $\Omega$  касается внешним образом всех трех окружностей  $\omega_\alpha, \omega_\beta$  и  $\omega_\gamma$ . Докажите, что центр окружности  $\Omega$  лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ .
5. Пусть  $A_1$  — основание биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$ ,  $I$  — центр вписанной в него окружности. Пусть  $XY$  — произвольная хорда описанной окружности треугольника  $BIC$ , проходящая через  $A_1$ . Докажите, что  $AA_1$  — биссектриса угла  $XAY$ .
6. На плоскости дан треугольник  $ABC$ . Через произвольную точку  $D$  плоскости провели прямые  $l_a, l_b$  и  $l_c$ , такие что  $l_a \perp AD, l_b \perp BD$  и  $l_c \perp CD$ . Точка  $A_1$  — пересечение  $l_a$  и прямой  $BC$ ,  $B_1$  — пересечение  $l_b$  и  $AC$ ,  $C_1$  — пересечение  $l_c$  и  $AB$ .
  - (а) Докажите, что середины отрезков  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  лежат на одной прямой.
  - (б) Докажите, что  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой.
7. Три равных правильных тетраэдра имеют общий центр. Могут ли все грани многогранника, являющегося их пересечением, быть равны?