

Лемма о пропорциональных проекциях

1. Дан вписанный в окружность с центром O четырёхугольник $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей P . В точке A восстановили перпендикуляр к AB , в точке D — к CD . Эти перпендикуляры пересеклись в точке Q . Докажите, что точки O, P и Q лежат на одной прямой.
2. Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке K . Пусть M и N — центры окружностей, описанных около треугольников AKB и CKD соответственно. Докажите, что $OM = KN$.
3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I . Точка M — середина отрезка A_1B_1 . Докажите, что $MI \perp AB$.
4. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность с центром I касается его стороны BC в точке K . На сторонах AB, AC отмечены точки P и Q соответственно, что $AP = CK, AQ = BK$; AD — диаметр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $PQ \perp DI$.
5. Дан остроугольный треугольник ABC и точка P пересечения касательных к его описанной окружности в точках B и C . Перпендикуляр, восстановленный в точке A к прямой AB и перпендикуляр, восстановленный в C к AC пересекаются в точке X . Перпендикуляр, восстановленный в точке A к прямой A и перпендикуляр, восстановленный в B к AB пересекаются в точке Y . Докажите, что $AP \perp XY$.
6. В неравностороннем остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр. Биссектриса угла BHC пересекает прямые AB и AC в точках P и Q . Перпендикуляры, восстановленные к сторонам AB и AC в точках P и Q пересекаются в точке K . Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.
7. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены соответственно такие точки Y и X , что $BY = CX = BC$. Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна прямой XY .
8. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC , M — точка пересечения медиан. Докажите, что
 - (а) $MI \parallel AB$ тогда и только тогда, когда $2AB = AC + BC$.
 - (б) $MI \perp AB$ тогда и только тогда, когда $3AB = AC + BC$.
9. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Прямые BC и B_1C_1 пересекают биссектрису угла A в точках X и Y . Докажите, что центр окружности, проходящей через X и Y и касающейся в них прямых BC и B_1C_1 , лежит на медиане треугольника ABC .
10. Точки D и E выбраны на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно так, что $DB = EC$. Пусть прямые CD и BE пересекаются в точке F . Докажите, что центр вписанной окружности I треугольника ABC , ортоцентр H треугольника DEF и середина M дуги BAC описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.