

Разнобой 1.

- Огород имеет вид клетчатого квадрата 7×7 клеток. Грядка хрена занимает две клетки, соседние по вертикали, а грядка редьки — две клетки, соседние по горизонтали. Садовник хочет посадить n грядок хрена и n грядок редьки. При каком наибольшем n ему удастся это сделать?
- Даны 10 натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{10} . Известно, что $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 1000$. Оказалось, что произведение их факториалов $a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_{10}!$ является 10-й степенью натурального числа. Докажите, что все данные числа равны.
- В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC , BH_b — высота, точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO , пересекает прямую BO в точке X . Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.
- Существуют ли три различных ненулевых числа a, b, c такие, что среди чисел $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, \frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$ и $\frac{c+a}{c^2+ca+c^2}$ два равны, а третье отлично от них?
- Прямоугольник разбит на 2016 прямоугольников со сторонами, параллельными его сторонам. Узлы — это вершины этих прямоугольников. Отрезок, лежащий на стороне некоторого прямоугольничка, назовём *базисным*, если его концы являются узлами и на нем нет других узлов. Какое наименьшее количество базисных отрезков может получиться при разбиении прямоугольника?
- Внутри треугольника ABC отмечена точка P . Прямая AP пересекает BC в точке Q . Прямая PC пересекает AB в точке R . На стороне AC отмечена точка X , а на её продолжении за точку A — точка Y , причем $\angle BYP = 90^\circ = \angle RXQ$. Отрезки PY и RX пересекаются в точке T , а отрезки BP и QR пересекаются в точке S . Докажите, что ST — биссектриса угла XSY .