

## Разнобой 1.

1. Огород имеет вид клетчатого квадрата  $7 \times 7$  клеток. Грядка хрена занимает две клетки, соседние по вертикали, а грядка редьки — две клетки, соседние по горизонтали. Садовник хочет посадить  $n$  грядок хрена и  $n$  грядок редьки. При каком наибольшем  $n$  ему удастся это сделать?
2. Даны 10 натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ . Известно, что  $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 1000$ . Оказалось, что произведение их факториалов  $a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_{10}!$  является 10-й степенью натурального числа. Докажите, что все данные числа равны.
3. В остроугольном треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  меньше стороны  $BC$ ,  $BN_b$  — высота, точка  $O$  — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через  $N_b$  параллельно прямой  $CO$ , пересекает прямую  $BO$  в точке  $X$ . Докажите, что точка  $X$  и середины сторон  $AB$  и  $AC$  лежат на одной прямой.
4. Существуют ли три различных ненулевых числа  $a, b, c$  такие, что среди чисел  $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ ,  $\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$  и  $\frac{c+a}{c^2+ca+c^2}$  два равны, а третье отлично от них?
5. Прямоугольник разбит на 2016 прямоугольничков со сторонами, параллельными его сторонам. Узлы — это вершины этих прямоугольничков. Отрезок, лежащий на стороне некоторого прямоугольничка, назовём *базисным*, если его концы являются узлами и на нем нет других узлов. Какое наименьшее количество базисных отрезков может получиться при разбиении прямоугольника?
6. Внутри треугольника  $ABC$  отмечена точка  $P$ . Прямая  $AP$  пересекает  $BC$  в точке  $Q$ . Прямая  $PC$  пересекает  $AB$  в точке  $R$ . На стороне  $AC$  отмечена точка  $X$ , а на её продолжении за точку  $A$  — точка  $Y$ , причем  $\angle BYP = 90^\circ = \angle RXQ$ . Отрезки  $PY$  и  $RX$  пересекаются в точке  $T$ , а отрезки  $BP$  и  $QR$  пересекаются в точке  $S$ . Докажите, что  $ST$  — биссектриса угла  $XSU$ .