Инварианты Дена

Определение. Многоугольники (многогранники) называются *равновеликими*, если их площади (объёмы) совпадают. Два многоугольника (многогранника) называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на многоугольники (многогранники), переложив которые, можно получить другой.

Очевидно, что любые два равносоставленных многоугольника (многогранника) равновелики. В двумерном случае верно и обратное утверждение.

Теорема Бойяи - Гервина. Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Оказывается, что в пространстве обратное утверждение неверно. (Услышав это вы должны быть сильно шокированы.) Мы докажем это, рассмотрев так называемые *инварианты Дена.*

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *аддитивной*, если при всех $x, y \in \mathbb{R}$ она удовлетворяет уравнению Коши:

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Определение. Пусть у многогранника M ровно n рёбер, их длины равны $l_1, l_2, \ldots, l_n$, а величины двугранных углов при этих рёбрах равны $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ соответственно. *Инвариантом Дена* многогранника M относительно функции f назовём величину

$$D_f(M) = \sum_{i=1}^{n} l_i f(\varphi_i),$$

где f — некоторая аддитивная функция, такая что $f(\pi) = 0$.

Утверждение. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — вещественные числа, линейно независимые над $\mathbb{Q}$ (т.е. если $a_1q_1 + a_2q_2 + \ldots + a_kq_k = 0$, где $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{Q}$, то $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$). Тогда существует аддитивная функция, принимающая в точках $a_1, a_2, \ldots, a_k$ любые наперёд заданные значения.

Это утверждение, которое мы доказывали на сборах, даёт нам очень много функций, которые можно использовать для построений инвариантов Дена.

1. Пусть многогранник M разбит на многогранники $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Докажите, что
$$D_f(M) = D_f(M_1) + D_f(M_2) + \ldots + D_f(M_n).$$

2. Найдите инвариант Дена куба.

3. **(а)** Пусть $\cos(\alpha) = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1, q \neq \pm 1, \pm 2$. Тогда $\cos(2\alpha) = \frac{p_1}{q_1}$, где $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}, (p_1, q_1) = 1$ и $|q_1| > |q|$.
(б) Пусть $\cos(\alpha\pi) = \beta$, где α и β рациональны. Докажите, что $\beta = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$.

4. **(а)** Докажите, что $\frac{1}{\pi}\arccos(\frac{1}{3})$ иррационально.
(б) Докажите, что куб и правильный тетраэдр равного объёма не равносоставлены.

5. Рассмотрим тетраэдр, натянутый на три попарно перпендикулярных ребра одинаковой длины, отложенных от одной точки. Докажите, что он не равносоставлен ни кубу, ни правильному тетраэдру тех же объёмов.

6. Докажите, что инвариант Дена любой призмы равен 0.

7. Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на несколько правильных тетраэдров.