# Аддитивная комбинаторика

**1.** Даны два конечных непустых множества $A$ и $B$ целых чисел. Известно, что $|A| = n$, $|B| = m$. Определите, в зависимости от $m$ и $n$, минимальный возможный размер множества $A + B$ всевозможных сумм вида $a + b$ (где $a \in A$, $b \in B$).

**2.** Среди чисел от 1 до 100 выбрали некоторые 16. Докажите, что среди этих шестнадцати найдутся различные $a, b, c, d$ такие, что $a + b = c + d$.

**3.** **(Теорема Коши–Девенпорта).** Даны два конечных непустых множества $A$ и $B$ остатков по простому модулю $p$. Тогда множество $A + B$ всевозможных сумм вида $a + b$ (где $a \in A$, $b \in B$) содержит хотя бы $\min(p, |A| + |B| - 1)$ элементов.

**(a)** Докажите, что если $A \cap B \neq \emptyset$, то множество $(A \cap B) + (A \cup B)$ является подмножеством множества $A + B$.

**(b)** Докажите теорему Коши–Девенпорта.

**4.** Дано множество $A$, состоящее из 100 различных натуральных чисел из отрезка $[1, 10^6]$. Докажите, что существует такое множество $B$, состоящее из 200 различных натуральных чисел из того же отрезка, что всевозможные суммы вида $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$, различны (всего $200 \cdot 100$ сумм).

**5.** **(Теорема Эрдеша–Гинзбурга–Зива).** Для любого натурального $n$ из любых $2n - 1$ целых чисел всегда можно выбрать $n$ чисел с кратной $n$ суммой.

**(a)** Дан набор из $p-1$ ненулевых не обязательно различных остатков по простому модулю $p$. Рассматриваются всевозможные $2^{p-1}$ сумм по всем подмножествам этого набора (сумма элементов пустого множества равна 0). Докажите, что среди значений рассматриваемых сумм встретятся всевозможные остатки по модулю $p$.

**(b)** Докажите теорему Эрдеша–Гинзбурга–Зива для простых $n$.

**(c)** Докажите теорему Эрдеша–Гинзбурга–Зива в общем случае.

**6.** Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — различные натуральные числа, а $M$ — множество из $n - 1$ натуральных чисел, не содержащее число $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Кузнечик сидит в нуле. Докажите, что он может сделать так прыжки вправо длинами $a_1, \ldots, a_n$ в некотором порядке (каждой длины должен быть ровно один прыжок), что он не попадёт ни в одно число множества $M$.

**7.** Дано множество $S$, состоящее из $n$ натуральных чисел. Для $k \leqslant n$ рассмотрим всевозможные суммы вида $x_1 + \ldots + x_k$, где $x_i$ — различные элементы из $S$. Докажите, что количество различных значений сумм, состоящих из $k$ слагаемых, не может быть меньше, чем $k(n - k) + 1$.