Алгебраический разнобой.

1. Про действительные a, b, c, d известно, что $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$. Чему может равняться $ab + cd$?

2. Рассмотрим алгебраическое выражение $F(a, \ldots, x)$, содержащее переменные, скобки и операции умножения и вычитания. Числовые константы не используются. Заменим один из знаков операции на $\circledcirc$, другой — на $\circledast$. Назовем полученное выражение «формулой». Например, формулой будет выражение $(a \circledcirc b) \circledast c$, причем один из знаков обозначает разность, а другой — умножение. Существует ли формула, которая при любых значениях переменных (и любом из смыслов знаков) дает значение **(а)** 0, **(б)** 1?

3. Последовательность $\{x_i\}$ задана так: $x_1 \in (0, 1)$ и $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$. Докажите, что $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{2025}^3 < 1$.

4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)) = 5x + 4$$

Найдите чему может равняться $f(-1)$.

5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a + b + c = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{\sqrt{(1-a)(1-b)} + \sqrt{(1-b)(1-c)} + \sqrt{(1-c)(1-a)}}{1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}$$

6. Найдите все такие натуральные n, при которых для произвольного многочлена $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами найдутся различные натуральные a и b, такие что $P(a) + P(b)$ делится на $a + b$.

7. Докажите, что для любых целых чисел a_1, a_2, a_3, делящихся на 3 и одновременно неравных 0, найдутся целые b_1, b_2, b_3, не делящиеся на 3, такие что выполнено равенство

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

.