

Многочлены Чебышёва

Многочлены Чебышёва первого рода определяются рекуррентно:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Многочлены Чебышёва второго рода определяются рекуррентно:

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

1. Докажите $T_n(\cos \varphi) = \cos(n\varphi)$ и $U_{n-1}(\cos \varphi) = \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}$.

2. Докажите тождества

(а) $T_{n+1}(x) = xU_n(x) - U_{n-1}(x);$

(б) $T_n(x)^2 - (x^2 - 1)U_{n-1}(x)^2 = 1;$

(в) $T_{nm}(x) = T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x));$

(г) $T_n(x) + \sqrt{x^2 - 1}U_{n-1}(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n;$

(д) $T'_n(x) = nU_{n-1}(x).$

Рассмотрим приведенный многочлен $P_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}.$

3. (а) Докажите, что $\max_{|x|<1} |P_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$

(б) Рассмотрим приведенный многочлен $Q(x)$ степени n . Докажите, что если

$$\max_{|x|<1} |Q(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ то } Q = P_n.$$

Таким образом, $P_n(x)$ — приведенный многочлен степени n , который меньше всего отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

4. Дан приведённый многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами степени $n \geq 1$. Докажите, что существует такая точка $y \in [0, n]$, что $|P(y)| \geq \frac{n!}{2^n}$.
5. Рассмотрим многочлены $P_1(x) = x^2 - 2$ и $P_n(x) = P_1(P_{n-1}(x))$ для $n = 2, \dots$. Докажите, что для всех натуральных n корни уравнения $P_n(x) = x$ вещественны и различны.
6. Рассмотрим многочлен $T_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x^1 + a_0$ с натуральными коэффициентами такой, что для каждого $t \neq 0$ выполнено $T_n(t + \frac{1}{t}) = t^n + \frac{1}{t^n}$. Докажите, что $(a_i, n) > 1$ для всех $0 \leq i \leq n - 1$.

7. Дано нечётное натуральное n . Докажите, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)} = \frac{n^2}{2}.$$