Со сферами

1. Сфера касается сторон многогранного угла. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.

2. В четырёхгранный угол вписана сфера. Докажите, что суммы противоположных плоских углов этого четырехгранного угла равны.

3. Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY тупоугольный.

4. Высота четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей её основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

5. Дана выпуклая четырехугольная пирамида с вершиной S и основанием $ABCD$, причём существует сфера, вписанная в эту пирамиду (то есть расположенная внутри пирамиды и касающаяся всех её граней). Пирамиду разрезали по рёбрам SA, SB, SC, SD и отогнули грани SAB, SBC, SCD, SAD вовне на плоскость $ABCD$ так, что получился многоугольник $AKBLCMDN$. Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности.

6. В закрытой крышкой полусферической вазе лежат четыре одинаковых апельсина и грейпфрут. Апельсины касаются вазы, грейпфрут касается всех апельсинов. Верно ли, что точки касания грейпфрута с апельсинами лежат в одной плоскости?

7. В четырехугольную пирамиду $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, можно вписать сферу. Докажите, что сумма площадей граней SAB и SCD равна сумме площадей граней SBC и SAD.

8. Вписанная сфера тетраэдра $ABCD$ касается грани BCD в точке X, вневписанная сфера касается грани BCD в точке Y. Докажите, что точки X и Y изогонально сопряжены относительно треугольника BCD (т. е. что $\angle BAX = \angle YAC$ и т. п.).

9. Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу Ω. Докажите, что сферы, симметричные Ω относительно прямых SA, SB, SC и плоскости ABC, имеют общую точку. Сфера, симметричная данной относительно прямой ℓ — это сфера такого же радиуса, центр которой симметричен центру исходной сферы относительно прямой ℓ.