Разнобой

1. На столе - куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из трех камней?

2. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 2\angle B$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что $AD + AE = BE$

3. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = x^2+ax+b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1. Докажите, что $b \leqslant -\frac{1}{4}$.

4. Последовательность $\{x_n\}$ определена рекурсивно: $x_1 = a$ при некотором натуральном a, а также $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Пусть $y_n = 2^{x_n} - 1$. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может быть в последовательности $\{y_n\}$?

5. На плоскости отмечены N точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем N это возможно?

6. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдется школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдется школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах

7. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности (BCD) выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке A. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$