

Циклы

1. Натуральное число заменяют на сумму сотых степеней своих цифр. Докажите, что процесс периодичен, возможно, с предпериодом.
2. В тридесятом царстве ни одна из дорог не заканчивается тупиком. Рыцарь, выезжает из своего замка и, доезжая до любого перекрестка, едет по самой левой дороге. Докажите, что таким образом он попадет обратно в свой замок.
3. Дана бесконечная вправо последовательность букв русского алфавита. Известно, что в ней различных подслов длины 100 столько же, сколько различных подслов длины 101. Докажите, что последовательность периодична, возможно, с предпериодом.
4. Есть неограниченное число чёрных и белых кубиков. Нужно построить из них башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик граничил с чётным числом белых, а каждый белый — с нечётным числом чёрных. При любом ли нижнем заданном слое кубиков такую башню конечной высоты можно построить?
5. Есть бесконечная в обе стороны клетчатая полоса, состоящая из белых клеток и шаблон — некоторое конечное подмножество клеток полосы. Разрешается сдвигать шаблон и одновременно перекрашивать все клетки (белые на чёрные и наоборот), покрытые сдвигом шаблона. Докажите, что можно сделать серию перекрашиваний так, чтобы чёрными были ровно две клетки.
6. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарiku.
 - (а) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.
 - (б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.