

Алгебраическая добавка (сложная)

1. Петя прибавил к натуральному числу N натуральное число M и заметил, что сумма цифр у результата та же, что и у N . Тогда он снова прибавил M к результату, потом – ещё раз, и т. д. Обязательно ли он когда-нибудь снова получит число с той же суммой цифр, что и у N ?
2. Дано нечётное простое число p . Целые числа $a_1, \dots, a_p$ таковы, что сумма $a_1^i + a_2^i + \dots + a_p^i$ кратна p при каждом $i = 1, 2, \dots, s$. При каком наименьшем s из этого следует, что числа $a_1, \dots, a_p$ дают либо одинаковые, либо попарно различные остатки при делении на p ?
3. Найдите все такие многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, что для любых действительных чисел s, t если $P(s)$ и $P(t)$ оба целые, то и $P(st)$ тоже целое.