Письменяя отборочная олимпиада

1. На плоскости отметили треугольник ABC и провели 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника ABC. Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.

2. Клетчатый прямоугольник с нечетными сторонами разбили по линиям сетки на прямоугольники. Докажите, что найдется хотя бы один прямоугольник разбиения, расстояния от которого до всех четырех сторон исходного прямоугольника имеют одну и ту же чётность.

3. Простое число $p > 2$ и натуральные числа m, n таковы, что квадрат числа p совпадает со средним арифметическим квадратов чисел m и n. Докажите, что число $2p - m - n$ является либо точным квадратом, либо удвоенным точным квадратом.

4. Пусть l — прямая, проходящая через вершину A равнобедренного треугольника ABC параллельно его основанию BC, а D — произвольная точка на прямой l. Обозначим за E и F проекции точки A на прямые BD и CD соответственно, а за P и Q — проекции точек E и F на прямую l. Докажите, что $AQ + AP \leq AB$.

5. Фигура «Большooой крест» состоит из двух клетчатых прямоугольников 1×2025 с общей центральной клеткой. При каком наименьшем k можно вырезать из доски 4050×4050 k клеток так, чтобы из оставшейся части нельзя было вырезать «Большooой крест»?

6. Докажите, что при каждом натуральном n число решений уравнения $\alpha + 2\beta + 2\gamma + 3\delta = n$ в натуральных числах равно числу решений в натуральных числах уравнения $a + b + c + d = n$, где $a > b > d$ и $a > c > d$.