Клеточки

1. На шахматную доску 2025×2025 поставили 2025 ладей так, что ни одна из них не бьёт другую. Докажите, что в любом квадрате 1013×1013 стоит хотя бы одна ладья.

2. На доске нарисован клетчатый квадрат 9×9. Двое по очереди стирают в нём единичные отрезки. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется ни одного контура прямоугольника. Кто выигрывает при правильной игре?

3. На изначально пустую доску 8×8 одна за другой выставляются фишки. Фишку можно ставить только в свободную клетку, которая граничит по стороне хотя бы с тремя свободными клетками. Какое наибольшее число фишек мы можем выставить на доску по таким правилам?

4. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.

5. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

6. Клетчатая доска $2n \times 2m$ раскрашена в шахматную раскраску. Сколькими способами можно поставить на белые клетки такой доски mn фишек так, чтобы в одной клетке стояло не более одной фишки и никакие две фишки не стояли в соседних по диагонали клетках?

7. В некоторых целых точках неотрицательной четверти $(\mathbb{Z}_+)^2$ в начальный момент времени живёт инфекция (обозначим это множество M). На каждом такте времени происходит следующее: если точки $(x+1, y)$ и $(x, y+1)$ заражены, то в следующий момент времени будет заражена и точка (x, y) (старые клетки останутся заражёнными). Известно, что ноль оказался заражён по истечении некоторого времени. Докажите, что

$$\sum_{(x,y)\in M} \frac{1}{1+x+y} \geq 1.$$