

Многочлены.

1. Про квадратные трёхчлены f_1 и f_2 известно, что они оба имеют корни. Разность $f_1 - f_2$ не имеет корней. Докажите что $f_1 + f_2$ имеет корни.
2. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
3. Учитель написал на доске квадратный трёхчлен $x^2 + 10x + 20$. Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору либо коэффициент при x , либо свободный член. В результате получился трёхчлен $x^2 + 20x + 10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трёхчлен с целыми корнями?
4. Дан многочлен $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$. Докажите, что у многочлена $P(x)^{2025}$ есть отрицательный коэффициент.
5. Натуральные числа a, b, c и простое $p > 3$ таковы, что $a + b + c = p + 1$, и $a^3 + b^3 + c^3 - 1$ делится на p . Докажите, что одно из чисел a, b, c равно 1.
6. Найдите все многочлены $P(x)$ нечетной степени с вещественными коэффициентами такие, что $P(x)^2 + 1 = P(x^2 + 1)$.
7. Даны неконстантные многочлены $A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ и $B(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$. Докажите, что сумма квадратов коэффициентов многочлена $A(x)B(x)$ не меньше, чем $a_0^2 + b_0^2$.