Геометрия многоходовочек

Решение задачи подобно вскрытию скорлупы ореха: можно бить по ней молотком, пока она не треснет, а можно лить на неё воду, пока давление не заставит скорлупу открыться саму собой.

—Перефразируя Александра Гротендика

1. На отрезке AB отмечена точка M. Точки P и Q — середины отрезков AM и BM соответственно, точка O — середина отрезка PQ. Выберем точку C так, чтобы угол ACB был прямым. Пусть MD и ME — перпендикуляры, опущенные из точки M на прямые CA и CB, а F — середина отрезка DE. Докажите, что длина отрезка OF не зависит от выбора точки C. :)

2. Четыре точки A, B, C и D лежат на окружности ω так, что $AB = BC = CD$. Касательная к ω в точке C пересекает касательную к ω в точке A и прямую AD в точках K и L соответственно. Окружность ω и описанная окружность треугольника KLA вторично пересекаются в точке M. Докажите, что $MA = ML$.

3. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. Точка D — середина стороны AC, E — основание высоты, опущенной из A на сторону BC, F — точка пересечения прямых AB и DE. Точка H на дуге BC окружности ω, не содержащей точку A, такова, что $\angle BHE = \angle ABC$. Докажите, что $\angle BHF = 90°$.

4. В окружности ω, описанной около треугольника ABC, хорда KL проходит через середину M отрезка AB и перпендикулярна ей. Некоторая окружность проходит через точки L и M и пересекает отрезок CK в точках P и Q (Q лежит на отрезке KP). Пусть LQ пересекает описанную окружность треугольника KMQ в точке R. Докажите, что четырехугольник $APBR$ вписанный.

5. Точка I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC. Пусть N — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, P — такая точка, что $ABPC$ является параллелограммом. Точка Q симметрична A относительно N, R — проекция A на прямую QI. Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника PQR.

6. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB \neq AC$. Пусть D — точка на прямой BC такая, что прямая DA касается описанной окружности треугольника ABC. Пусть E и F — центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно, а M — середина отрезка EF. Докажите, что касательная к описанной окружности треугольника AMD в точке D также касается описанной окружности треугольника ABC.

7. В прямоугольном треугольнике ABC проведена к гипотенузе высота BH. Точка D такова, что прямая BH делит отрезок AD пополам. Прямая CD пересекает BH в точке P. Окружность ω построена на отрезке CD как на диаметре. Прямая AD пересекает ω в точках D и S, а прямая BS - в точках S и Q. Докажите, что прямая PQ касается ω.

8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB = BC$, а углы ABD и BCD равны 90°. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. На стороне AD выбрана точка F так, что $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EA}$. Окружность ω с диаметром DF вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABF, в точке K. Точка L — вторая точка пересечения ω и прямой EF. Докажите, что прямая KL проходит через середину отрезка CE.

Ну и, как обычно, самому смаку (ради которого, как вы знаете, и делается листик) не хватило место, так что он спрятался в добавку и ждёт своих героев!