

Однодневный разныйбой.

1. Найдите вероятность того, что в случайной перестановке $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ чисел $1, 2, 3, 4, \dots, n$ для любого $1 < k \leq n$ число a_k будет либо больше всех чисел левее него, либо меньше всех чисел левее него.
2. На доске 10×10 отмечено несколько клеток, причем никакие три отмеченные клетки не образуют «уголок». Докажите, что существует разбиение доски на доминошки, такое что каждая доминошка содержит не более одной отмеченной клетки.
3. На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно такие, что отрезки BQ и DP делят площадь четырёхугольника пополам. Доказать, что отрезок PQ проходит через середину диагонали AC .
4. Докажите, что для положительных x, y, z не больших 1 верно

$$\frac{x+y}{2+z} + \frac{y+z}{2+x} + \frac{z+x}{2+y} \leq 2$$

5. Пусть O — центр правильного треугольника ABC . Из произвольной точки P плоскости опустили перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров. Докажите, что M — середина отрезка PO .
6. В классе m учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух из них обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый нет. Найдите наибольшее возможное значение m .