

Прикольные(?) задачи

1. Через точку внутри треугольника провели три чевианы. Оказалось, что длины шести отрезков, на которые они разбивают стороны треугольника, образуют в каком-то порядке геометрическую прогрессию. Докажите, что длины чевиан тоже образуют геометрическую прогрессию.
2. Даны ненулевые числа p и q . Различные числа a, b и c — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Найдите значение выражения $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$.
3. Даны две окружности и три прямые. Каждая прямая отсекает на окружностях хорды равной длины. Точки пересечения прямых образуют треугольник. Докажите, что описанная окружность этого треугольника проходит через середину отрезка между центрами данных окружностей.
4. Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?
5. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что $1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1}$ даёт такой же остаток при делении на p^2 , что и число $(p-1)! + p$.
6. Имеется доска 100×100 . В некоторых узлах этой доски сидит по муравью. В какой-то момент все они начинают ползти со скоростью одна клетка в минуту параллельно одному из краёв доски. Если два муравья, движущиеся в противоположных направлениях, сталкиваются, они оба поворачивают на 90° по часовой стрелке и продолжают ползти. Если сталкиваются больше чем два муравья, или если сталкиваются муравьи, ползущие в перпендикулярных направлениях, они не меняют своих направлений. Если муравей должен выползти за край доски, то он с неё падает. Докажите, что через 151 минуту ни одного муравья на доске не останется.