

Разной про графы

1. Докажите, что в связном графе с бесконечным количеством вершин с конечной степенью каждой есть бесконечный (а не только сколь угодно большой) путь.
2. В ориентированном графе не существует пути, проходящего по всем вершинам (возможно, по несколько раз). Докажите, что можно выделить в нём некоторые (но не все) вершины так, что из них ни одно ребро не будет вести в невыделенные.
3. Каждый из 2025 учёных прорецензировал неопубликованную статью ровно одного другого. Докажите, что можно устроить конференцию на хотя бы 675 учёных, чтобы никто не был заранее знаком ни с чьими результатами.
4. В графе 20 вершин, из каждой из которых выходит по 10 рёбер. Докажите, что в нём найдётся $K_{3,3}$.
5. В однокруговом турнире участвуют $2n > 4$ команд. В каждом туре все $2n$ команд разбиваются на n пар. К текущему моменту уже сыгран $n - 1$ тур. Докажите, что можно сыграть ещё как минимум два тура.
6. На плоскости отметили конечное количество точек. Докажите, что можно покрасить их в 2 цвета так, чтобы на каждой вертикальной или горизонтальной прямой количества точек этих цветов отличались не более, чем на 1.
7. В стране 2025 городов и 4500 дорог. Докажите, что можно указать кольцевой маршрут, проходящий не более, чем через 20 городов.
8. В графе с $2n$ вершинами степень каждой не более 19. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в 5 цветов так, чтобы не более чем $3n$ рёбер соединяли вершины одного цвета.
9. В дереве 100 висячих вершин. Докажите, что можно провести ещё 50 рёбер, чтобы при удалении любого ребра граф оставался связным.