

Неравенства

1. Положительные числа a, b, c , таковы, что $ab + bc + ca \geq a + b + c$. Докажите, что

$$a + b + c \geq 3$$

2. Даны числа $0 < a, b, c, d < 1$. Оказалось, что $abcd = (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d)$. Докажите неравенство

$$a + b + c + d - (a + c)(b + d) \geq 1$$

3. Пусть a, b, c, d, e — вещественные числа, большие единицы. Докажите, что справедливо неравенство

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{e-1} + \frac{e^2}{a-1} \geq 20$$

4. По кругу расставлено не менее четырёх неотрицательных чисел, в сумме равных единице. Докажите, что сумма всех попарных произведений соседних чисел не больше $1/4$.

5. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ таковы, что $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ и $\frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1$. Докажите, что

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$$

6. Для положительных a, b, c, d, e найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{ab + bc + cd + de}{2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2e^2}.$$

7. Даны положительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ и натуральное число $k < n$. Докажите неравенство.

$$\frac{x_1}{x_2 + \dots + x_{k+1}} + \frac{x_2}{x_3 + x_4 + \dots + x_{k+2}} + \dots + \frac{x_n}{x_1 + \dots + x_k} \geq \frac{n}{k^2}$$