

## Неравенства

1. Некоторые неотрицательные числа  $a, b, c$  удовлетворяют равенству  $a + b + c = 2\sqrt{abc}$ . Докажите, что  $bc \geq b + c$ .
2. Докажите, что при  $a, b, c \in [0, 1]$  выполняется неравенство

$$(1 - a)(1 + ab)(1 + ac)(1 - abc) \leq (1 + a)(1 - ab)(1 - ac)(1 + abc).$$

3. Для положительных  $a, b, c, d$  найдите минимальное возможное значение выражения

$$\left(1 + \frac{2a}{3b}\right) \left(1 + \frac{2b}{3c}\right) \left(1 + \frac{2c}{3d}\right) \left(1 + \frac{2d}{3a}\right).$$

4. Для положительных  $a, b, c, d, e$  найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{ab + bc + cd + de}{2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2e^2}.$$

5. Для положительных  $a, b, c$  докажите, что

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

6. Даны натуральные числа  $a, b$  и  $c \geq b$ . Докажите, что  $a^b(a + b)^c > c^b a^c$ .
7. Вещественные числа  $a, b$  и  $c$  удовлетворяют условию  $abc + a + b + c = ab + bc + ca + 5$ . Какое минимальное значение может принимать  $a^2 + b^2 + c^2$ ?
8. Докажите что при натуральных  $n \geq 2$  выполняется неравенство:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}} + \sqrt[3]{\frac{2}{n+1}} + \dots + \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}}{n} \leq \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt[3]{\frac{n-1}{n}}}{n-1}.$$