

Геометрический разнобой.

1. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P . Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD , пересекаются в точке Q . Докажите, что $PQ \perp AB$.
2. Пусть вневписанная окружность ω касается стороны BC треугольника ABC в точке A' и касается продолжений сторон AB и AC в точках C' и B' соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что, если радиус описанной окружности треугольника ABC равен радиусу ω , то O — ортоцентр треугольника $A'B'C'$.
3. Пусть BH — высота треугольника ABC , точки A', B' и C' — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Описанные окружности треугольников AHC' и CHA' повторно пересекаются в точке M . Докажите, что $\angle ABM = \angle CBB'$.
4. Через середины сторон треугольника T проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам противолежащих углов треугольника. Эти прямые образовали треугольник T_1 . Докажите, что центр описанной около T_1 окружности находится в середине отрезка, образованного центром вписанной окружности и точкой пересечения высот треугольника T .
5. Чевяны BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются на его высоте AH . Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle AHC_1$.
6. Пусть E — проекция вершины C прямоугольника $ABCD$ на диагональ BD . Докажите, что общие внешние касательные к окружностям AEB и AED пересекаются на окружности AEC .
7. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC , вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 . Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ее же в точках A_2, B_2, C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.