

Гео разнбой

1. На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ взяли такие точки X и Y , что AX перпендикулярно биссектрисе угла CBD , а BY перпендикулярно биссектрисе угла CAD . Докажите, что $XY \parallel CD$.
2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q . На ω_1 выбраны отдельные точки A_1 и B_1 (не P и не Q). Прямые A_1P и B_1P повторно пересекают ω_2 в A_2 и B_2 соответственно, а прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке C . Докажите, что при изменении A_1 и B_1 центры описанных треугольников A_1A_2C лежат на фиксированной окружности.
3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Диагонали этого четырехугольника пересекаются в точке M , причем $\angle AMB = 60^\circ$. Точки K и L расположены вне $ABCD$ так, что треугольники AKD и BLC равносторонние. Отрезок KL пересекает ω в точках P и Q . Докажите, что $KP = QL$.
4. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка X так, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABX и BXC равны. Докажите, что

$$BX^2 = S_{ABC} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\angle B}{2}\right).$$

5. Биссектриса ℓ угла A треугольника ABC пересекает BC в точке D . Прямая d проходит через D перпендикулярно ℓ . Окружность ω проходит через точки B и C , причем ее центр лежит на ℓ . G — произвольная точка на окружности ω . Прямая GA пересекает d в точке R . Докажите, что (DGR) касается ω .
6. Пусть E — проекция вершины C прямоугольника $ABCD$ на диагональ BD . Докажите, что общие внешние касательные к окружностям AEB и AED пересекаются на окружности AEC .
7. Обозначим через A_1, B_1, C_1 основания высот треугольника ABC , проведенные через вершины A, B, C соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Окружности (ABC) и AOA_1 повторно пересекаются в точке $P \neq A$. Прямые PB_1 и PC_1 повторно пересекают (ABC) в точках X и Y . Докажите, что $XY \parallel BC$.
8. Пусть I_a — центр вневписанной окружности треугольника ABC относительно A , а AI_a пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке T . Пусть X — точка на TI_a такая, что $XI_a^2 = XA \cdot XT$. Перпендикуляр от X к BC пересекает BC в A' . Аналогично определяются B' и C' . Докажите, что AA', BB' и C' пересекаются в одной точке.