

## Диагностическая работа

1. Вася подкидывает монетку и считает, в какой части случаев выпадает орёл. После очередного броска отношение количества выпавших орлов ко всем броскам было меньше  $3/4$ , а через некоторое время — больше. Верно ли, что в какой-то момент это отношение равнялось  $3/4$ ?
2. Для кратных 4 целых  $n > 100$  обозначим через  $A_n$  сумму всех положительных нечетных делителей числа  $n$ , а через  $B_n$  — сумму всех положительных четных делителей  $n$ . Каково минимальное возможное значение выражения  $B_n - 2A_n - n$  (среди всех кратных 4 чисел  $n > 100$ )?
3. Верно ли, что в любом выпуклом  $n$ -угольнике ( $n > 3$ ) существует вершина и выходящая из неё диагональ такие, что диагональ образует острые углы с обеими сторонами, выходящими из этой вершины?
4. Три окружности  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$  и  $\gamma_c$  имеют общую точку  $X$ . Касательная к  $\gamma_a$  в точке  $X$  повторно пересекает  $\gamma_b$  и  $\gamma_c$  в точках  $A_b$  и  $A_c$ . Точка  $M_a$  — середина отрезка  $A_bA_c$ . Точки  $M_b$  и  $M_c$  определены аналогично. Докажите, что четырёхугольник  $M_aM_bM_cX$  — вписанный.
5. При каком наименьшем натуральном  $n \geq 2$  существуют такие натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , что  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 1$  делится на  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ ?
6. На доске  $m \times n$  разложили решкой вверх монеты, по одной в каждую клетку, а затем перевернули одну из угловых монет орлом вверх. За один ход можно убрать любую монету, лежащую орлом вверх, и перевернуть монеты во всех соседних с ней по стороне клетках. При каких размерах доски с неё можно убрать все монеты?