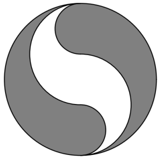
Дистанционная диагностическая работа

1. Корпорация «S» придумала свой логотип, составив его из круга радиуса $\frac{n}{\pi}$ и четырёх полукругов, диаметры которых лежат на диаметре круга . Найдите периметр тёмной части логотипа.



2. Найдите наименьшее нечётное натуральное число, среди делителей которого есть четыре, ни один из которых не делится на наибольший общий делитель трёх других.

3. Несколько (больше двух) шариков двух цветов — красного и синего — расположены по кругу. Каждую минуту все шарики, оба соседа которых того же цвета, что и сам шарик, одновременно меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались ровно 30 минут, после чего прекратились. Какое наименьшее количество шариков могло быть в круге?

4. В треугольнике ABC, I — точка пересечения биссектрис, AH — высота (H лежит на отрезке BC). Точки P и Q отмечены на сторонах AC и AB соответственно так, что $CP = CH$ и $AP = AQ$. Оказалось, что $\angle PIH = \angle BAC$. Найдите HQ, если известно, что $AP = 5, AB = 50$.

5. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что

$$P(x) = \frac{(x^{2310} - 1)^6}{(x^{105} - 1)(x^{70} - 1)(x^{42} - 1)(x^{30} - 1)}$$

верно для всех $0 < x < 1$. Найдите коэффициент $P(x)$ при x^{2022}

6. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка M — середина стороны BC. Известно, что $BC = 4, MA = 3$, а $\angle HMA = 60^\circ$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

7. На клетчатой бумаге белым цветом нарисован квадрат $2n \times 2n$. Каждую минуту Маша может выбрать узел, из которого в данный момент исходят хотя бы 3 белых отрезка, и покрасить в красный два белых единичных отрезка, выходящих из этого узла и образующих отрезок длины 2. Какое наименьшее количество белых отрезков может остаться, когда Маша закончит перекрашивать отрезки?

8. Найдите все такие натуральные $n \geqslant 2$, что существует перестановка $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ чисел $1, 2, 3, \ldots, 2n$, для которой верно равенство

$$a_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4 + \ldots + a_{2n-3} \cdot a_{2n-2} = a_{2n-1} \cdot a_{2n}.$$

9. Из вершины равностороннего треугольника со стороной 1 выпускают мячик. Все стороны треугольника отражают мячик так, что угол падения равен углу отражения. Мячик отражается от сторон треугольника ровно 137 раз и возвращается в вершину, откуда начинал свой путь. При этом мячик на своём пути (кроме первого и последнего моментов) не оказывался ни в какой вершине треугольника. Пусть M — максимальная возможная длина пути мячика, m — минимальная возможная. Найдите $M^2 - m^2$.