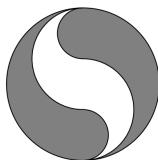


Дистанционная диагностическая работа, решения

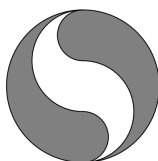
- 1.1. Корпорация «S» придумала свой логотип, составив его из круга радиуса $\frac{1}{\pi}$ и четырёх полукругов, диаметры которых лежат на диаметре круга. Найдите периметр тёмной части логотипа.



Ответ: 4.

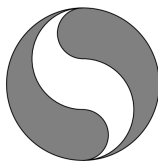
Решение. Пусть радиусы больших полукругов — r_1 и r_2 , тогда радиусы меньших — $\frac{1}{\pi} - r_1$ и $\frac{1}{\pi} - r_2$, следовательно, их суммарный периметр — $\pi \cdot r_1 + \pi \cdot r_2 + \pi \cdot (\frac{1}{\pi} - r_1) + \pi \cdot (\frac{1}{\pi} - r_2) = 2$, периметр большого круга — 2, следовательно, общий периметр темной части — 4.

- 1.2. Корпорация «S» придумала свой логотип, составив его из круга радиуса $\frac{2}{\pi}$ и четырёх полукругов, диаметры которых лежат на диаметре круга. Найдите периметр тёмной части логотипа.



Ответ: 8.

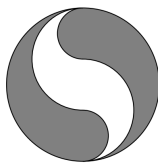
- 1.3. Корпорация «S» придумала свой логотип, составив его из круга радиуса $\frac{3}{\pi}$ и четырёх полукругов, диаметры которых лежат на диаметре круга. Найдите периметр тёмной части логотипа.



Ответ: 12.

- 1.4. Корпорация «S» придумала свой логотип, составив его из круга радиуса $\frac{4}{\pi}$ и четырёх полукругов, диаметры которых лежат на диаметре круга. Найдите периметр тёмной части логотипа.

Найдите периметр тёмной части логотипа.



Ответ: 16.

- 2.1.** Андрей придумал натуральное нечётное n . Далее он выписал на доску семь его делителей. Оказалось, что ни одно из чисел на доске не делится на наибольший общий делитель шести других чисел. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 4849845.

Решение. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ — делители числа Андрея. Рассмотрим произвольный делитель a_i . Он не делится на НОД остальных делителей, а значит существует простой делитель p_i , т.ч. все делители $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_7)$, кроме a_i делятся на p_i . Тогда и число Андрея делится на p_i . Получается, что число Андрея делится по крайней мере на 7 простых делителей, но не делится на 2, т.к. оно нечетно. Тогда число Андрея не меньше, чем $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 4849845$. Несложно видеть, что $n = 4849845$ подходит, если взять $a_1 = \frac{n}{3}, a_2 = \frac{n}{5}, \dots, a_7 = \frac{n}{19}$

- 2.2.** Андрей придумал натуральное нечётное n . Далее он выписал на доску пять его делителей. Оказалось, что ни одно из чисел на доске не делится на наибольший общий делитель четырёх других чисел. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 15015.

- 2.3.** Андрей придумал натуральное нечётное n . Далее он выписал на доску шесть его делителей. Оказалось, что ни одно из чисел на доске не делится на наибольший общий делитель пяти других чисел. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 255255.

- 3.** По кругу расположено $n > 2$ шариков, каждый покрашен либо в чёрный, либо в белый цвет. Каждую секунду все шарики, соседи которых покрашены в тот же цвет, что и сам шарик, одновременно перекрашиваются в противоположный цвет. Ровно через $2k$ секунд шарики прекратили перекрашиваться. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: $4k + 2$.

Решение. Пример. Изначально один шарик черного цвета, остальные — белого. Тогда на t секунде в другой цвет перекрашиваются $4k + 1 - 2t$

шаров, наиболее дальних от исходно черного шара.

Оценка. Будем следить за числом пар соседних шаров, покрашенных в разные цвета. Изначально их хотя бы 2, потому что иначе все шары одного цвета, и перекрашивание никогда не остановится. В каждую секунду, в которую какие-то шары перекрашиваются, их становится хотя бы на два больше: по краям максимальной цепочки подряд идущих шаров, которые одновременно перекрасились, образуются 2 новых пары, и никакие уже существующие пары не пропадут. Тогда в конце пар хотя бы $4k + 2$, то есть шаров тоже хотя бы $4k + 2$.

- 3.1.** По кругу расположено $n > 2$ шариков, каждый покрашен либо в чёрный, либо в белый цвет. Каждую секунду все шарики, соседи которых покрашены в тот же цвет, что и сам шарик, одновременно перекрашиваются в противоположный цвет. Ровно через 30 секунд шарики прекратили перекрашиваться. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 62.

- 3.2.** По кругу расположено $n > 2$ шариков, каждый покрашен либо в чёрный, либо в белый цвет. Каждую секунду все шарики, соседи которых покрашены в тот же цвет, что и сам шарик, одновременно перекрашиваются в противоположный цвет. Ровно через 40 секунд шарики прекратили перекрашиваться. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 82.

- 3.3.** По кругу расположено $n > 2$ шариков, каждый покрашен либо в чёрный, либо в белый цвет. Каждую секунду все шарики, соседи которых покрашены в тот же цвет, что и сам шарик, одновременно перекрашиваются в противоположный цвет. Ровно через 50 секунд шарики прекратили перекрашиваться. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 102.

- 3.4.** По кругу расположено $n > 2$ шариков, каждый покрашен либо в чёрный, либо в белый цвет. Каждую секунду все шарики, соседи которых покрашены в тот же цвет, что и сам шарик, одновременно перекрашиваются в противоположный цвет. Ровно через 20 секунд шарики прекратили перекрашиваться. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 42.

- 4.1.** В треугольнике ABC , I — точка пересечения биссектрис, $АН$ — высота (H лежит на отрезке BC , I лежит внутри треугольника AHB). Точки P и Q отмечены на сторонах AC и AB соответственно так, что $CP = CH$ и $AP = AQ$. Оказалось, что $\angle PIH = \angle BAC$. Найдите HQ , если известно, что $AP = 6$, $AB = 60$.

Ответ: 18.

Решение.

Треугольники PCI и HCI равны по первому признаку, а значит $IP = IH$. Треугольники API и AQI равны по первому признаку, а значит $IP = IQ$. Тогда точки Q, P, H лежат на одной окружности с центром I .

$\angle PIN$ — центральный угол этой окружности, опирающийся на дугу $\widehat{PH}$. $\angle PQH$ — вписанный угол этой же окружности, опирающийся на дугу $\widehat{PH}$. Тогда $\angle PQH = \frac{1}{2}\angle PIN = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle QAI$. Треугольник QAP — равнобедренный и $\angle PQA = 90^\circ - \angle QAI = 90^\circ - \angle PQH$. Т.е. $\angle HQA = 90^\circ$. Получается, что HQ — высота в прямоугольном треугольнике AHB и $HQ = \sqrt{AQ \cdot QB} = \sqrt{6 \cdot 54} = 18$.

- 4.2. В треугольнике ABC , I — точка пересечения биссектрис, AH — высота (H лежит на отрезке BC , I лежит внутри треугольника AHB). Точки P и Q отмечены на сторонах AC и AB соответственно так, что $CP = CH$ и $AP = AQ$. Оказалось, что $\angle PIN = \angle BAC$. Найдите HQ , если известно, что $AP = 5$, $AB = 50$.

Ответ: 15.

- 4.3. В треугольнике ABC , I — точка пересечения биссектрис, AH — высота (H лежит на отрезке BC , I лежит внутри треугольника AHB). Точки P и Q отмечены на сторонах AC и AB соответственно так, что $CP = CH$ и $AP = AQ$. Оказалось, что $\angle PIN = \angle BAC$. Найдите HQ , если известно, что $AP = 7$, $AB = 70$.

Ответ: 21.

- 4.4. В треугольнике ABC , I — точка пересечения биссектрис, AH — высота (H лежит на отрезке BC , I лежит внутри треугольника AHB). Точки P и Q отмечены на сторонах AC и AB соответственно так, что $CP = CH$ и $AP = AQ$. Оказалось, что $\angle PIN = \angle BAC$. Найдите HQ , если известно, что $AP = 8$, $AB = 80$.

Ответ: 24.

- 5.1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что

$$P(x) = \frac{(x^{2310} - 1)^6}{(x^{105} - 1)(x^{70} - 1)(x^{42} - 1)(x^{30} - 1)}$$

верно для всех $0 < x < 1$. Найдите коэффициент $P(x)$ при x^{2022}

Ответ: 220.

Решение. Мы знаем, что $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i$. Применяя, получаем $P(x) = (1 + x^{105} + x^{210} + \dots)(1 + x^{70} + x^{140} + \dots)(1 + x^{42} + x^{84} + \dots)(1 + x^{30} + x^{60} + \dots)(x^{4620} - 2x^{2310} + 1)$. Последняя скобка не вносит вклад в

коэффициент при x^{2022} , поэтому ее можно игнорировать. Нам осталось решить уравнение

$$105b + 70c + 42d + 30e = 2022$$

в целых неотрицательных числах.

Рассматривая уравнение по модулю 2, получаем $b \equiv 0 \pmod{2}$. Можно записать $b = 2b'$. Подставляя, получаем, что достаточно решить

$$105b' + 35c + 21d + 15e = 1011$$

в целых неотрицательных числах.

Рассматривая прошлое уравнение по модулю 3, получаем $c \equiv 0 \pmod{3}$. Можно записать $c = 3c'$. Подставляя, получаем, что достаточно решить

$$35b' + 35c' + 7d + 5e = 337.$$

в целых неотрицательных числах.

Рассматривая прошлое уравнение по модулю 5, получаем $2d \equiv 2 \pmod{5}$. Можно записать $d = 5d' + 1$. Подставляя, получаем, что достаточно решить

$$7b' + 7c' + 7d' + e = 66.$$

в целых неотрицательных числах.

Рассматривая прошлое уравнение по модулю 7, получаем $e \equiv 3 \pmod{5}$. Можно записать $e = 7e' + 3$. Подставляя, получаем, что достаточно решить

$$b' + c' + d' + e' = 9.$$

в целых неотрицательных числах.

Если рассмотреть число решений этого уравнения как число способов поставить 3 перегородки между 9 шарами, можно получить ответ $C_{9+3}^3 = 220$.

5.2. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что

$$P(x) = \frac{(x^{2310} - 1)^6}{(x^{105} - 1)(x^{70} - 1)(x^{42} - 1)(x^{30} - 1)}$$

верно для всех $0 < x < 1$. Найдите коэффициент $P(x)$ при x^{2023}

Ответ: 165.

5.3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что

$$P(x) = \frac{(x^{2310} - 1)^6}{(x^{105} - 1)(x^{70} - 1)(x^{42} - 1)(x^{30} - 1)}$$

верно для всех $0 < x < 1$. Найдите коэффициент $P(x)$ при x^{1659}

Ответ: 120.

- 5.4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что

$$P(x) = \frac{(x^{2310} - 1)^6}{(x^{105} - 1)(x^{70} - 1)(x^{42} - 1)(x^{30} - 1)}$$

верно для всех $0 < x < 1$. Найдите коэффициент $P(x)$ при x^{2230}

Ответ: 286.

- 6.1. Точка H — ортоцентр треугольника ABC , точка M — середина стороны BC . Известно, что $BC = 4$, $MA = 5$, а $\angle HMA = 60^\circ$. Найдите квадрат радиуса описанной окружности треугольника ABC .

Ответ: 8,89.

Решение.

Пусть точка P — второе пересечение прямой AM и описанной окружности треугольника ABC , точка A_1 — диаметрально противоположная точке A на описанной окружности треугольника ABC . Хорды AP и BC пересекаются в точке M , следовательно $MP = \frac{BM \cdot MC}{AM} = \frac{4}{5}$. Заметим, что точки H, M, A_1 лежат на одной прямой и $\angle APA_1$ опирается на диаметр AA_1 . Значит треугольник A_1HP — треугольник с углами $30^\circ, 60^\circ$ и 90° и $A_1P = \sqrt{3}MP = \frac{4\sqrt{3}}{5}$. По теореме Пифагора для треугольника APA_1 : $AA_1^2 = AP^2 + PA_1^2 = (5 + \frac{4}{5})^2 + (\frac{4\sqrt{3}}{5})^2 = \frac{841}{25} + \frac{48}{25} = \frac{889}{25}$. Осталось заметить, что квадрат радиуса в 4 раза меньше квадрата диаметра, т.е. квадрат радиуса равен $\frac{889}{100} = 8,89$.

- 6.2. Точка H — ортоцентр треугольника ABC , точка M — середина стороны BC . Известно, что $BC = 6$, $MA = 5$, а $\angle HMA = 60^\circ$. Найдите квадрат радиуса описанной окружности треугольника ABC .

Ответ: 13,99.

- 6.3. Точка H — ортоцентр треугольника ABC , точка M — середина стороны BC . Известно, что $BC = 8$, $MA = 10$, а $\angle HMA = 60^\circ$. Найдите квадрат радиуса описанной окружности треугольника ABC .

Ответ: 35,56.

- 6.4. Точка H — ортоцентр треугольника ABC , точка M — середина стороны BC . Известно, что $BC = 12$, $MA = 10$, а $\angle HMA = 60^\circ$. Найдите квадрат радиуса описанной окружности треугольника ABC .

Ответ: 55,96.

7. На клетчатой бумаге чёрным цветом нарисован квадрат $2n \times 2n$. Каждую минуту Маша может выбрать узел, из которого в данный момент исходят хотя бы 3 чёрных отрезка, и покрасить в красный два чёрных единичных отрезка, выходящих из этого узла и образующих отрезок длины 2. Какое наименьшее количество чёрных отрезков может остаться, когда Маша закончит перекрашивать отрезки?

Ответ: $4n - 2$.

Решение.

Пример. Пронумеруем столбцы и строки таблицы $2n \times 2n$ от 1 до $2n + 1$. Сначала покрасим все отрезки на границе. Затем покрасим по 2 отрезка 2-го, 4-го, $\dots$, $2n$ -го столбцов. Затем во 2-й строчке покрасим $2n - 2$ отрезка ($n - 1$ отрезок длины 2) так, чтобы остались непокрашенными отрезки по краям. Затем покрасим по 2 отрезка из 3-го, 5-го, $\dots$, $(2n - 1)$ -го столбцов так, чтобы сверху осталось по одному непокрашенному отрезку в этих столбцах. Далее покрасим все отрезки 3-й строчки. Затем покрасим по 2 верхних отрезка чётных столбцов, затем $2n - 2$ средних отрезков 4-й строчки, затем верхние отрезки в нечётных столбцах, а затем все отрезки 5-й строки. Будем дальше продолжать этот алгоритм, несложно убедиться, что останутся только крайние отрезки в нечётных столбцах (не считая 1 и $2n + 1$) и чётных строках, в итоге $4n - 2$.

Оценка. Отметим все отрезки, которые не лежат на границе квадрата $2n \times 2n$. Всего отмечено $2n - 1$ горизонтальных и вертикальных рядов по $2n$ отрезков. Итого, у нас $2(2n - 1) \times 2n$ отмеченных отрезков. Заметим, что узел можно выбирать в качестве середины отрезка длины 2 не более одного раза. При этом отмеченный отрезок можно покрасить только если выбран узел, не лежащий на границе квадрата $2n \times 2n$. Таких узлов $(2n - 1)^2$, а значит, мы покрасим не более $2(2n - 1)^2$ отрезков. Таким образом, в конце останется не менее $2(2n - 1) \cdot 2n - 2(2n - 1)^2 = 2(2n - 1)$ черных отрезков.

- 7.1. На клетчатой бумаге чёрным цветом нарисован квадрат 30×30 . Каждую минуту Маша может выбрать узел, из которого в данный момент исходят хотя бы 3 чёрных отрезка, и покрасить в красный два чёрных единичных отрезка, выходящих из этого узла и образующих отрезок длины 2. Какое наименьшее количество чёрных отрезков может остаться, когда Маша закончит перекрашивать отрезки?

Ответ: 58.

- 7.2. На клетчатой бумаге чёрным цветом нарисован квадрат 40×40 . Каждую минуту Маша может выбрать узел, из которого в данный момент исходят хотя бы 3 чёрных отрезка, и покрасить в красный два чёрных единичных отрезка, выходящих из этого узла и образующих отрезок длины 2. Какое наименьшее количество чёрных отрезков может остаться, когда Маша закончит перекрашивать отрезки?

Ответ: 78.

- 7.3. На клетчатой бумаге чёрным цветом нарисован квадрат 50×50 . Каждую минуту Маша может выбрать узел, из которого в данный момент исходят хотя бы 3 чёрных отрезка, и покрасить в красный два чёрных единичных отрезка, выходящих из этого узла и образующих отрезок длины 2. Какое наименьшее количество чёрных отрезков может остаться, когда Маша закончит перекрашивать отрезки?

Ответ: 98.

- 7.4. На клетчатой бумаге чёрным цветом нарисован квадрат 60×60 . Каждую минуту Маша может выбрать узел, из которого в данный момент исходят хотя бы 3 чёрных отрезка, и покрасить в красный два чёрных единичных отрезка, выходящих из этого узла и образующих отрезок длины 2. Какое наименьшее количество чёрных отрезков может остаться, когда Маша закончит перекрашивать отрезки?

Ответ: 118.

- 8.1. Ваня утверждает, что для некоторого натурального $n \geq 2$ придумал такую перестановку $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n})$ чисел $(1, 2, 3, \dots, 2n)$, что

$$x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + \dots + x_{2n-3} \cdot x_{2n-2} = x_{2n-1} \cdot x_{2n}.$$

Найдите все возможные значения n .

Ответ: 3, 4, 5, 6, 7.

Решение. Заметим, что наибольшее значение правой части $2n(2n-1)$. Найдём наименьшее значение левой части.

Утверждение. Наименьшее значение левой части равно $1 \cdot (2n-2) + 2 \cdot (2n-3) + \dots + (n-1) \cdot n$.

Докажем это утверждение, а сначала покажем, как, пользуясь им, решить задачу. Выражение выше можно преобразовать как

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} i(2n-1-i) &= (2n-1) \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \\ &= (2n-1) \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}. \end{aligned}$$

Поэтому должно быть выполнено неравенство

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{3} \leq 2n(2n-1)$$

Это равносильно $n-1 \leq 6$, или $n \leq 7$.

Осталось привести примеры для $n = 3, 4, 5, 6, 7$. Для $n = 7$ пример очевидно следует из прошлой части решения:

$$1 \cdot 12 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 7 = 13 \cdot 14.$$

Для $n = 3$: $1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 5$.

Для $n = 4$: $8 \cdot 5 = 7 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 3$.

Для $n = 5$: $8 \cdot 9 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5$.

Для $n = 6$: $12 \cdot 10 = 11 \cdot 1 + 9 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 6 \cdot 2$.

Доказательство утверждения. Докажем индукцией по n , что если есть $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$, то наименьшая сумма произведений по парам — это $a_1 a_{2n} + a_2 a_{2n-1} + \dots + a_n a_{n+1}$.

База $n = 2$. Надо доказать, что если a — наименьшее из четырёх чисел, а d — наибольшее, то $ad + bc < ab + cd$. Перенесём, получим $a(d - b) < c(d - b)$, что верно, так как $a < c$ и $d - b > 0$.

Переход $n - 1 \rightarrow n$. Рассмотрим способ разбиения $2n$ чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$ на пары с наименьшей суммой произведений. Из базы следует, что a_1 должно быть в паре с a_{2n} , иначе если они в парах с другими, то можно поменять и уменьшить сумму. По предположению индукции для $a_2 < a_3 < \dots < a_{2n-1}$ наименьшая сумма произведений в парах — это $a_2 a_{2n-1} + a_3 a_{2n-2} + \dots + a_n a_{n+1}$. Это завершает переход.

- 9.1.** Из вершины равностороннего треугольника со стороной 1 выпускают мячик. Все стороны треугольника отражают мячик так, что угол падения равен углу отражения. Мячик отражается от сторон треугольника ровно 137 раз и возвращается в вершину, откуда начинал свой путь. При этом мячик на своём пути (кроме первого и последнего моментов) не оказывался ни в какой вершине треугольника. Пусть M — максимальная возможная длина пути мячика, m — минимальная возможная. Найдите $M^2 - m^2$.

Ответ: 540.

Решение. Для простоты нарисуем треугольную сетку, состоящую из треугольников со стороны 1. Тогда путь мячика можно представить как прямую линию, соединяющую два узла сетки, соответствующих одной вершине исходного треугольника.

Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной l . Заметим, что линия, соединяющая верхний узел треугольника и один из узлов на нижней стороне треугольника и не пересекающая других узлов сетки, пересекает ровно $2l - 3$ сторон сетки. Также заметим, что вершины на нижней стороне треугольника, соответствующие той же вершине исходного треугольника, что и верхняя вершина большого треугольника, находятся от самой левой вершины нижней стороны на расстоянии, имеющем такой же остаток при

делении на 3, что и $2l$. Тогда путь нашего мячика можно представить как линию, соединяющую верхнюю вершину треугольника с длиной стороны 70, с одной из вершин на нижней стороне этого треугольника. Более того, путь обязан кончаться на вершине, отстоящей от самой левой на 2, 5, 8, ..., 65 или 68. Тогда чем дальше вершина от середины треугольника, тем больше длина пути. Заметим, что если конечная вершина пути отстоит от левого края треугольника на i , путь не пересекает другие вершины тогда и только тогда, когда 70 и i взаимно просты.

Из всего вышесказанного следует, что нам нужно найти наименьшее и наибольшее из чисел 2, 3, 8, ..., 32, 35, взаимно простое с 70. Эти числа — 11 и 29. Осталось найти соответствующие длины путей. Сделаем это по теореме косинусов: $M^2 = 70^2 + 11^2 - 70 \cdot 11$, $m^2 = 70^2 + 29^2 - 70 \cdot 29$. $M^2 - m^2 = 11^2 - 29^2 - 70(11 - 29) = (11 + 29 - 70)(11 - 29) = -(30) \cdot (-18) = 540$.

- 9.2.** Из вершины равностороннего треугольника со стороной 1 выпускают мячик. Все стороны треугольника отражают мячик так, что угол падения равен углу отражения. Мячик отражается от сторон треугольника ровно 77 раз и возвращается в вершину, откуда начинал свой путь. При этом мячик на своём пути (кроме первого и последнего моментов) не оказывался ни в какой вершине треугольника. Пусть M — максимальная возможная длина пути мячика, m — минимальная возможная. Найдите $M^2 - m^2$.

Ответ: 72.

- 9.3.** Из вершины равностороннего треугольника со стороной 1 выпускают мячик. Все стороны треугольника отражают мячик так, что угол падения равен углу отражения. Мячик отражается от сторон треугольника ровно 197 раз и возвращается в вершину, откуда начинал свой путь. При этом мячик на своём пути (кроме первого и последнего моментов) не оказывался ни в какой вершине треугольника. Пусть M — максимальная возможная длина пути мячика, m — минимальная возможная. Найдите $M^2 - m^2$.

Ответ: 1512.

- 9.4.** Из вершины равностороннего треугольника со стороной 1 выпускают мячик. Все стороны треугольника отражают мячик так, что угол падения равен углу отражения. Мячик отражается от сторон треугольника ровно 145 раз и возвращается в вершину, откуда начинал свой путь. При этом мячик на своём пути (кроме первого и последнего моментов) не оказывался ни в какой вершине треугольника. Пусть M — максимальная возможная длина пути мячика, m — минимальная возможная. Найдите $M^2 - m^2$.

Ответ: 1260.