Диагностическая работа, решения

1. Вася подкидывает монетку и считает, в какой части случаев выпадает орёл. После очередного броска отношение количества выпавших орлов ко всем броскам было меньше $3/4$, а через некоторое время — больше. Верно ли, что в какой-то момент это отношение равнялось $3/4$?

Решение. Пусть a - число выпавших орлов, а b - число бросков. Тогда интересующее нас отношение - это $\frac{a}{b}$. В нашем случае (так как все числа положительные) выражение $\frac{a}{b} * \frac{3}{4}$ эквивалентно выражению $4a - 3b * 0$ независимо от того, знак $>$, $<$ или $=$ стоит на месте звёздочки. Это значит, что условие можно переформулировать как то, что изначально выражение $X = 4a - 3b$ было отрицательным, а спустя несколько бросков монетки стало положительным, и нам нужно проверить, обязательно ли оно равнялось в какой-то момент нулю.

Посмотрим, как может меняться значение X в зависимости от результата броска. Если выпал орёл, то и a, и b увеличились на 1, а значит и X тоже. Если выпала решка, то значение a не изменилось, а значение b выросло на 1. Значит значение X уменьшилось на 3.

Рассмотрим последний бросок монетки, перед которым значение X было неотрицательным. После этого броска значение X стало положительным, значит оно увеличилось. Но если оно увеличилось, то оно могло увеличиться только на 1. При этом значение X всегда целое. Значит перед рассмотренным броском оно было равно 0. Это, в свою очередь, значит, что отношение $\frac{a}{b}$ в какой-то момент равнялось $\frac{3}{4}$. $\square$

2. Для кратных 4 целых $n > 100$ обозначим через A_n сумму всех положительных нечетных делителей числа n, а через B_n — сумму всех положительных четных делителей n. Каково минимальное возможное значение выражения $B_n - 2A_n - n$ (среди всех кратных 4 чисел $n > 100$)?

Решение. Пусть t - степень вхождения 2 в n. По условию $t \geq 2$. Заметим, что любой чётный делитель числа n представим в виде $2^k \cdot m$, где m - какой-то нечётный делитель n, а число k натуральное и $k \leq t$. Более того, любое число вида $2^k \cdot m$ для натурального $k \leq t$ и нечётного $m|n$ является чётным делителем n. Значит верно равенство $B_n = A_n \cdot (2 + \ldots + 2^t)$. Пусть для краткости $X = B_n - 2A_n - n$. Тогда $X = A_n \cdot (2 + \ldots + 2^t) - 2A_n - n = A_n \cdot (4 + \ldots + 2^t) - n$. Заметим, что аналогично рассуждению в начале решения $A_n \cdot (4 + \ldots + 2^t)$ - это сумма всех кратных 4 делителей n. В частности, в эту сумму входят делители n и 4 (так как n по условию кратно 4). Заметим также, что эти слагаемые не совпадают, так как n по условию больше 100. Значит $X \geq n + 4 - n = 4$.

Покажем теперь, что X может принимать значение 4. Пусть $n = 116 = 4 \cdot 29$. Тогда $A_n = 1 + 29 = 30$, $B_n = 2 + 4 + 58 + 116 = 180$, а $X = 180 - 60 - 116 = 4$. □

3. Верно ли, что в любом выпуклом n-угольнике ($n > 3$) существует вершина и выходящая из неё диагональ такие, что диагональ образует острые углы с обеими сторонами, выходящими из этой вершины?

Решение. Будем решать задачу от противного. Заметим, что если у нашего многоугольника есть хотя бы один острый или прямой угол, то любая выходящая из него диагональ подойдёт. Поэтому в дальнейшем будем считать, что все углы многоугольника тупые.

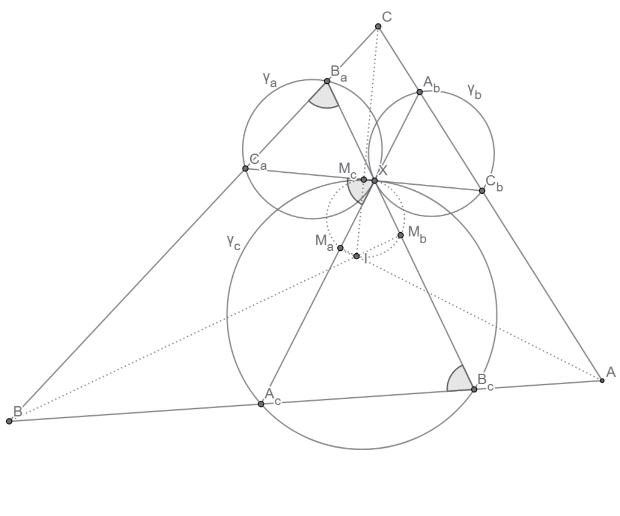
Назовём вершины многоугольника $A_1, \dots A_n$ (нумерация по часовой стрелке). Докажем по индукции, что угол $\angle A_1 A_i A_{i+1}$ тупой.

База индукции: для $i = 2$ угол $\angle A_1 A_i A_{i+1}$ тупой, так как является одним из углов исходного многоугольника.

Переход индукции: по предположению индукции мы знаем, что угол $\angle A_1 A_{i-1} A_i$ тупой. В треугольнике $A_1 A_{i-1} A_i$ не может быть двух тупых углов, значит угол $\angle A_1 A_i A_{i-1}$ острый. Тогда угол $\angle A_1 A_i A_{i+1}$ тупой - иначе вершина A_i и диагональ $A_i A_1$ подошли бы. Переход доказан.

В качестве следствия из только что доказанного по индукции утверждения получаем, что угол $\angle A_1 A_{n-1} A_n$ тупой. С другой стороны, угол $\angle A_1 A_n A_{n-1}$ тупой как угол исходного многоугольника. Таким образом, в треугольнике $A_1 A_{n-1} A_n$ два тупых угла. Противоречие. □

4. Три окружности γ_a, γ_b и γ_c имеют общую точку X. Касательная к γ_a в точке X повторно пересекает γ_b и γ_c в точках A_b и A_c. Точка M_a — середина отрезка $A_b A_c$. Точки M_b и M_c определены аналогично. Докажите, что четырёхугольник $M_a M_b M_c X$ — вписанный.



Решение. Пусть точки B_a, B_c, C_a и C_b определены аналогично точкам A_b и A_c из условия. Пусть также точка B - пересечение прямых A_cB_c и C_aB_a, а точки A, B и C определены аналогично. Дважды применив теорему об угле между касательной и хордой получаем равенство (ориентированных) углов:

$$\angle C_aB_aX = \angle C_aXA_c = \angle XB_cA_c$$

Таким образом, прямые A_cB_c и C_aB_a образуют равные противоположно ориентированные углы с прямой B_cB_a - или, по-простому, треугольник B_cBB_a равнобедренный. Значит прямая BM_B совпадает со срединным перпендикуляром к отрезку B_aB_c и биссектрисой угла $\angle ABC$. Аналогично, прямые AM_a и CM_c тоже являются биссектрисами треугольника ABC и перпендикулярны прямым XM_a и XM_c соответственно. Отсюда сразу следует, что точки M_a, M_b и M_c все лежат на окружности, построенной на отрезке XI как на диаметре, где I - точка пересечения биссектрис треугольника ABC. □

5. При каком наименьшем натуральном $n \geq 2$ существуют такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1$ делится на $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$?

Решение. Пусть $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1 = A$, а $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = B$. Заметим, что A и B всегда разной чётности. Значит, так как A делится на B, число A чётно, а B - нечётно. Раз A чётно, то $A+1$ нечётно. При этом $A+1$ является точным квадратом. Значит $A+1$ даёт остаток 1 при делении на 8, и A должно делиться на 8. Мы получили, что A кратно 8 и нечётному числу B, а значит оно кратно и $8B$. Так как все числа натуральные, из делимости получаем оценку: $A \geq 8B$.

С другой стороны, из неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим мы знаем, что $nB \geq A + 1$. Получаем цепочку неравенств: $nB \geq A + 1 > A \geq 8B$. Так как B - положительное, получаем, что $n \geq 9$.

Теперь приведём пример девяти чисел, удовлетворяющих условию. Пусть наш набор состоит из семи единиц и двух двоек. Тогда $A = 11^2 - 1 = 120$, а $B = 15$. Таким образом, в этом случае A действительно кратно B. Пример подходит. □

6. На доске $m \times n$ разложили решкой вверх монеты, по одной в каждую клетку, а затем перевернули одну из угловых монет орлом вверх. За один ход можно убрать любую монету, лежащую орлом вверх, и перевернуть монеты во всех соседних с ней по стороне клетках. При каких размерах доски с неё можно убрать все монеты?

Решение. Пусть X - клетчатая фигура, состоящая из клеток без монеток. Заметим, что за исключением первого хода мы можем убрать монету тогда и только тогда, когда её клетка граничит с нечётным числом пустых клеток. Таким образом, когда мы убираем монетку, периметр X либо увеличивается на 2 (если пустой сосед был один), либо уменьшается на 2 (если пустых соседей было трое).

Пусть нам удалось убрать все монеты. Тогда было сделано всего mn ходов. После первого хода периметр X стал равен 4, а после каждого следующего менялся на 2 в какую-то сторону. Значит по модулю 4 периметр X оказался равен $2(mn-1)$. С другой стороны, если нам удалось убрать все монеты, то X - это просто прямоугольник $m \times n$ и его периметр равен $2m+2n$. Это значит, что $2(m+n) \equiv_4 2(mn-1)$. Это равносильно тому, что $m+n \equiv_2 mn-1$. Значит и m, и n не могут одновременно быть чётными.

Теперь покажем, что если у прямоугольника есть нечётная сторона, то убрать все монеты возможно. Пусть, без потери общности, высота прямоугольника нечётна, и монета в левом верхнем углу изначально лежит орлом вверх. Перевернём по очереди (сверху вниз) весь крайний левый столбец. Мы получили прямоугольник с нечётной высотой, у которого крайний левый столбец весь лежит орлом вверх, а в остальных клетках монеты лежат решкой вверх. Научимся убирать все монеты из такой конфигурации.

Уберём все лежащие на нечётных местах монеты крайнего левого столбца (первую, третью, и так далее). После этого монеты на чётных местах в этом столбце продолжат лежать орлом вверх, так как каждую мы перевернули по два раза. Теперь уберём каждую из них. При этом на остальной части доски единственное, что произошло - это все монеты второго слева ряда перевернулись по одному разу. То есть в итоге мы целиком убрали крайний левый столбец, и при этом на остальной доске новый крайний левый столбец состоит из орлов, а остальные монеты - решки. Значит мы можем повторить описанную процедуру и повторять её, убирая по одному столбцу, пока не уберём все монеты. □