

Программа зачёта, 2026-09

Ко всем вопросам прикреплена ссылка либо на листик в Хеопсе (и первой, и второй групп), где есть разбор, либо на другое место с разбором.

Во всех теоретических вопросах, где не указано обратное, нужно знать не только формулировку, но и доказательство.

Теория

Алгебра

1. Однородные линейные рекурренты порядка k . Формула общего члена последовательности (с доказательством). Нелинейные рекурренты. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
2. Функциональное уравнение Коши и его решения. Базис Гамеля. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
3. Системы линейных уравнений. Эквивалентность двух систем линейных уравнений. Элементарные преобразования строк, метод Гаусса, улучшенный ступенчатый вид. Свободные и зависимые переменные, фундаментальное семейство решений. Ранг СЛУ и связь с числом свободных переменных. Если в однородной СЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет решение, отличное от нулевого. Если квадратная однородная СЛУ имеет единственное решение, то и неоднородная СЛУ с такой же левой частью имеет единственное решение. Общее решение неоднородной системы как суммы общего решения однородной и частного решения неоднородной. [Разбор](#)
4. Определение линейного пространства. Линейная комбинация векторов, линейная оболочка. Линейная зависимость. Базис, теорема о базисе. Дополнение множества линейно независимых векторов до базиса. Линейное подпространство. Сумма (прямая сумма) линейных подпространств. [Разбор](#)
5. Определение линейного отображения. Матрица линейного отображения. Пространство линейных отображений, его размерность. Любое линейное пространство размерности n над $\mathbb{K}$ изоморфно $\mathbb{K}^n$. Ядро, образ линейного отображения и соответствующие им подпространства. [Разбор](#)

Геометрия

1. Cool-ratio функция, cool ratio lemma. Проверка параллельности с помощью CRL, проверка того, что 4 точки лежат на одной окружности. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
2. Коники, 6 определений (без доказательства эквивалентности). Через 5 точек общего положения проходит единственная коника (с доказательством), двойственное утверждение (без доказательства). Проективные свойства коник: теоремы Паскаля и Брианшона, обратные теоремы Паскаля и Брианшона; двойное отношение четвёрки точек на конике; поляра относительно коники; полярный образ коники — это коника (без доказательства). [Разбор](#)

3. Оптическое свойство коник. Изогональное свойство, существование вписанной в многоугольник коники с фокусами в изогонально сопряжённых точках относительно этого многоугольника. [Разбор](#)
4. Точка Микеля, прямая Обера и прямая Гаусса в контексте параболы, вписанной в четвёрку прямых. Парабола как огибающая прямой через две линейно движущиеся точки; вывод из этого того, что огибающая прямой через две проективно движущиеся точки — это коника. [Разбор](#)
5. Равнобокая гипербола; если равнобокая гипербола проходит через вершины треугольника, то она проходит и через его ортоцентр; обратное утверждение. Антигонально сопряжённые точки, 3 эквивалентных определения. Точка Эйлера — Понселе. Лемма Соллертинского; образ прямой, не проходящей через вершины треугольника, при изогональном сопряжении. [Разбор](#)

Комбинаторика

1. Разбиение на параллелограммы. Выпуклый многоугольник можно разбить на параллелограммы тогда и только тогда, когда он центрально-симметричен. Существование подразбиения такого, что параллелограммы примыкают друг к другу целыми сторонами. Площадь пересечения цепочек параллелограммов, соответствующих двум непараллельным сторонам. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
2. Лемма Бёржа о максимальном паросочетании и удлиняющих цепях. Теорема Татта-Бёржа о максимальном паросочетании (без доказательства). [Группа 1](#), [Группа 2](#)
3. Теоремы Дирака и Оре о существовании в графе гамильтонова пути и гамильтонова цикла. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
4. Частично упорядоченные множества. Цепи и антицепи. Формулировки теорем Мирского и Дилуорса, доказательство любой одной из них (на ваш выбор). [Разбор](#)
5. Конечное вероятностное пространство, событие, вероятность, случайная величина. Математическое ожидание, свойство линейности математического ожидания. Индикатор события и его математическое ожидание. Независимость двух событий, взаимная независимость нескольких событий. Прямое произведение вероятностных пространств, связь с независимостью. [Разбор](#)
6. Полнота инвариантов в задачах про кнопки и лампочки: из одного состояния можно получить другое тогда и только тогда, когда для всех инвариантных множеств чётности количеств включённых лампочек в этих множествах у двух рассматриваемых состояний совпадают. [Разбор](#)

Задачи

Алгебра

1. Найдите формулу общего члена для последовательностей, заданных условиями:
(а) $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = 9$, $a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n$,
(б) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n - 2n + 5$.

[Группа 1](#), [Группа 2](#)

2. Найдите все тройки непрерывных функций $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $f(x+y) = g(x) + h(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
3. Вещественные числа $x_1, \dots, x_n$ лежат на отрезке $[-1, 1]$ и в сумме дают 0. Докажите, что

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \leq \frac{n}{4}.$$

[Группа 1, часть 1](#), [Группа 1, часть 2](#), [Группа 2, часть 1](#), [Группа 2, часть 2](#)

Нужно не только предъявить решение, но и рассказать логику поиска нужной оценки, т. е. объяснить, как в этой задаче работает подпор касательной и из каких соображений подбираются коэффициенты.

4. Даны числа $x_0, x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, причём $x_0 = x_n$. Докажите неравенство

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_{k-1}x_k + x_k^2) \geq 1.$$

[Группа 1, часть 1](#), [Группа 1, часть 2](#), [Группа 2, часть 1](#), [Группа 2, часть 2](#)

5. Докажите, что если у СЛУ с рациональными коэффициентами существует вещественное решение, то у неё есть хотя бы одно рациональное решение. [Разбор](#)
6. Пусть множество решений двух эквивалентных СЛУ непусто. Верно ли, что эти СЛУ можно привести друг к другу элементарными преобразованиями строк, если разрешено убирать и добавлять уравнение $0 = 0$? [Разбор](#)
7. Имеется клетчатая таблица $(k+2) \times (l+2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне. [Разбор](#)
8. Пусть дано линейное отображение $F : V \rightarrow W$ ранга r . Докажите, что в пространстве V можно выбрать базис $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, а в пространстве W — базис $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ так, что $F(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, r$, а для $i > r$ выполнено $F(\vec{v}_i) = 0$. [Разбор](#)

Геометрия

1. Внутри треугольника ABC расположены две касающиеся окружности. Одна окружность вписана в угол B , другая — в угол C . Докажите, что сумма ради-

усов этих окружностей больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC . [Группа 1](#), [Группа 2](#)

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке P . Биссектриса угла APB пересекает отрезки AB и CD в точках X и Y . Точки M и N — середины отрезков AB и CD . Докажите, что $XY \leq MN$.
[Группа 1](#), [Группа 2](#)
3. На плоскости даны точки A и B , а также прямая ℓ , проходящая через точку B . Рассмотрим произвольную окружность ω , касающуюся прямой ℓ в точке B и не содержащую внутри себя точку A . Касательные к ω , проведённые из точки A , касаются ω в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности ω . [Группа 1](#), [Группа 2](#)
4. Докажите с помощью CRL теорему о бабочке. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
5. Дан треугольник ABC . Точка D — основание высоты из вершины A , M — точка пересечения медиан, Y — точка пересечения луча MH с (ABC) , K и L — середины сторон AB и AC . Докажите, что окружности (ABC) и (KLY_a) касаются. [Группа 1](#), [Группа 2](#), [Статья в Кванте](#)
6. **Лемма Фусса для коник.** Коника Γ пересекает окружность ω_1 в точках A, B, C_1, D_1 , а окружность ω_2 — в точках A, B, C_2, D_2 . Докажите, что $C_1D_1 \parallel C_2D_2$.
[Разбор](#)
7. **Теорема Дроз-Фарни.** Через ортоцентр треугольника ABC провели две перпендикулярные прямые, который высекли по отрезку на каждой прямой, содержащей сторону треугольника. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной прямой. [Разбор](#)
8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle A = \angle B = \angle C$. Докажите, что вершина D лежит на прямой Эйлера треугольника ABC . [Разбор](#)
9. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H . Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность (BCD) в точках P и Q . Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$.
[Разбор](#)

Комбинаторика

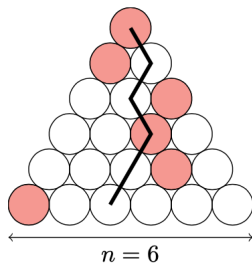
1. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны. [Группа 1](#), [Группа 2](#)
2. В центре круглого пруда плавает умная утка. На берегу её поджидает глупая лиса. Лиса бегает в 4 раза быстрее, чем плавает утка. Если утка достигнет берега, то она скроется в траве, и лиса её не найдёт. Что лучше: быть умным или быстро бегать? [Группа 1](#), [Группа 2](#)
3. На плоскости расположено 100 кроватей и сонный Алексей Вадимович. За один ход можно сместиться в любую сторону не более, чем на 1 метр. Сначала ходит Алексей Вадимович, затем одна из кроватей, затем снова Алексей Вадимович,

затем одна из кроватей и т. д. Верно ли, что для любой начальной позиции Алексей Вадимович сможет поспать? [Группа 1](#), [Группа 2](#)

4. Дан связный граф с нечётным числом вершин, двое играют в игру. Первый игрок выбирает произвольную вершину графа и ставит туда фишку. Далее игроки поочерёдно, начиная со второго, каждым своим ходом перемещают фишку в смежную вершину; при этом запрещено перемещать фишку в вершину, в которой она уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? [Группа 1](#), [Группа 2](#)

5. В некоторого графа расставлены мудрецы, на каждого из которых надевается чёрный или белый колпак. Мудрецы видят только цвета колпаков на мудрецах в соседних вершинах. Все мудрецы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Какое наибольшее число угадываний смогут себе гарантировать мудрецы? При решении этой задачи можно без доказательства использовать теорему Татта-Бёржса. [Группа 1](#), [Группа 2](#)

6. Японский треугольник состоит из $1 + 2 + \dots + n$ одинаковых кругов, выложенных в форме равностороннего треугольника. В каждом горизонтальном ряду ровно один круг покрашен в красный цвет. Путём ниндзя в японском треугольнике называется последовательность из n кругов, в которой каждый следующий круг примыкает к предыдущему снизу-слева или снизу-справа.



Найдите наибольшее число k (зависящее от n) такое, что в любом японском треугольнике существует путь ниндзя, содержащий хотя бы k красных кругов. [Разбор](#)

7. В стране $n > 100$ городов и пока нет дорог. Правительство случайно определяет стоимости строительства каждой из дорог, используя суммы от 1 до C_n^2 по одному разу (все варианты равновероятны). После этого мэр каждого города выбирает самую дешёвую из $(n - 1)$ дорог, выходящих из его города, и эта дорога строится. Найдите матожидание числа компонент связности полученного графа. [Разбор](#)

8. На сфере радиуса 1 нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная длиной меньше 2π (звенья ломаной — дуги экваторов). Докажите, что существует полусфера, полностью содержащая ломаную. [Разбор](#)

9. В таблице размером $m \times n$ записаны вещественные числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно однозначно восстановить стёртые. Докажите, что осталось хотя бы $(n + m - 1)$ чисел. [Разбор](#)