

Летние сборы, июнь 2026, 10 класс

Ключевые теория и задачи

Ниже представлены теория и задачи со сборов, которые мы считаем самыми важными. Тем, кто не был на сборах, рекомендуется самостоятельно изучить их для полноценной дальнейшей работы на кружке. Полные материалы сборов выложены на [странице кружка](#).

Теория

Алгебра

1. Системы линейных уравнений. Эквивалентность двух систем линейных уравнений. Элементарные преобразования строк, метод Гаусса, улучшенный ступенчатый вид. Свободные и зависимые переменные, фундаментальное семейство решений. Ранг СЛУ и связь с числом свободных переменных. Если в однородной СЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет решение, отличное от нулевого. Если квадратная однородная СЛУ имеет единственное решение, то и неоднородная СЛУ с такой же левой частью имеет единственное решение. Общее решение неоднородной системы как суммы общего решения однородной и частного решения неоднородной.
2. Определение линейного пространства. Линейная комбинация векторов, линейная оболочка. Линейная зависимость. Базис, теорема о базисе. Дополнение множества линейно независимых векторов до базиса. Линейное подпространство. Сумма (прямая сумма) линейных подпространств.
3. Определение линейного отображения. Матрица линейного отображения. Пространство линейных отображений, его размерность. Любое линейное пространство размерности n над $\mathbb{K}$ изоморфно $\mathbb{K}^n$. Ядро, образ линейного отображения и соответствующие им подпространства.

Геометрия

1. Коники, 6 определений (без доказательства эквивалентности). Через 5 точек общего положения проходит единственная коника (с доказательством), двойственное утверждение (без доказательства). Проективные свойства коник: теоремы Паскаля и Брианшона, обратные теоремы Паскаля и Брианшона; двойное отношение четвёрки точек на конике; поляра относительно коники; полярный образ коники — это коника (без доказательства).
2. Оптическое свойство коник. Изогональное свойство, существование вписанной в многоугольник коники с фокусами в изогонально сопряжённых точках относительно этого многоугольника.
3. Точка Микеля, прямая Обера и прямая Гаусса в контексте параболы, вписанной в четвёрку прямых. Парабола как огибающая прямой через две линейно движущиеся точки; вывод из этого того, что огибающая прямой через две проективно

движущиеся точки — это коника.

4. Равнобокая гипербола; если равнобокая гипербола проходит через вершины треугольника, то она проходит и через его ортоцентр; обратное утверждение. Антигонально сопряжённые точки, 3 эквивалентных определения. Точка Эйлера — Понселе. Лемма Соллертинского; образ прямой, не проходящей через вершины треугольника, при изогональном сопряжении.

Комбинаторика

1. Конечное вероятностное пространство, событие, вероятность, случайная величина. Математическое ожидание, свойство линейности математического ожидания. Индикатор события и его математическое ожидание. Независимость двух событий, взаимная независимость нескольких событий. Прямое произведение вероятностных пространств, связь с независимостью.
2. Полнота инвариантов в задачах про кнопки и лампочки: из одного состояния можно получить другое тогда и только тогда, когда для всех инвариантных множеств чётности количеств включённых лампочек в этих множествах в двух рассматриваемых состояниях совпадают.

Задачи

Алгебра

1. Докажите, что если у СЛУ с рациональными коэффициентами существует вещественное решение, то у неё есть хотя бы одно рациональное решение.
2. Пусть множество решений двух эквивалентных СЛУ непусто. Верно ли, что эти СЛУ можно привести друг к другу элементарными преобразованиями строк, если разрешено убирать и добавлять уравнение $0 = 0$?
3. Имеется клетчатая таблица $(k + 2) \times (l + 2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.
4. Пусть дано линейное отображение $F : V \rightarrow W$ ранга r . Докажите, что в пространстве V можно выбрать базис $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, а в пространстве W — базис $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ так, что $F(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, r$, а для $i > r$ выполнено $F(\vec{v}_i) = 0$.

Геометрия

1. **Лемма Фусса для коник.** Коника Γ пересекает окружность ω_1 в точках A, B, C_1, D_1 , а окружность ω_2 — в точках A, B, C_2, D_2 . Докажите, что $C_1D_1 \parallel C_2D_2$.
2. **Теорема Дроз-Фарни.** Через ортоцентр треугольника ABC провели две перпендикулярные прямые, который высекли по отрезку на каждой прямой, содер-

жащей сторону треугольника. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной прямой.

3. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle A = \angle B = \angle C$. Докажите, что вершина D лежит на прямой Эйлера треугольника ABC .
4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H . Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность (BCD) в точках P и Q . Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$.

Комбинаторика

1. В стране $n > 100$ городов и пока нет дорог. Правительство случайно определяет стоимости строительства каждой из дорог, используя суммы от 1 до C_n^2 по одному разу (все варианты равновероятны). После этого мэр каждого города выбирает самую дешёвую из $(n - 1)$ дорог, выходящих из его города, и эта дорога строится. Найдите матожидание числа компонент связности полученного графа.
2. На сфере радиуса 1 нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная длиной меньше 2π (звенья ломаной — дуги экваторов). Докажите, что существует полусфера, полностью содержащая ломаную.
3. В таблице размером $m \times n$ записаны вещественные числа так, что для каждой двух строк и каждой двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно однозначно восстановить стёртые. Докажите, что осталось хотя бы $(n + m - 1)$ чисел.