Городские кружки ЦПМ
Летние сборы, июнь 2026, 10 класс
Материалы занятий

Содержание

Часть I

Материалы группы 10–1

1 Алгебра

СЛУ

Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m. \end{cases}$$

Определение. Две СЛУ от переменных $x_1, \dots, x_n$ назовём **эквивалентными**, если у них совпадают множества решений.

Рассмотрим следующие элементарные преобразования:

- ЭП1: поменять местами две строки;
- ЭП2: умножить строку на ненулевое число;
- ЭП3: прибавить к строке другую строку, умноженную на число.

Утверждение. Если одна система линейных уравнений получается из другой путем применения ЭП1–ЭП3, то эти системы эквивалентны.

Определение. Система линейных уравнений называется **однородной**, если все $c_i = 0$.

Определение. Систему линейных уравнений, у которой уравнений столько же, сколько неизвестных, будем называть **квадратной**.

1. **(а)** Может ли однородная СЛУ быть эквивалентна неоднородной?
(б) Может ли квадратная СЛУ быть эквивалентна не квадратной?

2. *Метод Гаусса.* Докажите, что при помощи ЭП1–ЭП3 каждую систему линейных уравнений можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b_{1k}x_k + \cdots \quad \cdots \quad \cdots + b_{1n}x_n & = & d_1, \\ b_{2l}x_l + \cdots \quad \cdots + b_{2n}x_n & = & d_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{rs}x_s + \cdots + b_{rn}x_n & = & d_r, \\ 0 & = & d_{r+1}, \\ \vdots & & \\ 0 & = & d_m. \end{array} \right.$$

где $b_{1k}, b_{2l}, \dots, b_{rs} \neq 0$, $k < l < \dots < s$.

3. Решите методом Гаусса следующие системы линейных уравнений:

(а) $\begin{cases} x + 3y + z = 1, \\ 2x + 7y + 3z = 2, \\ -x - 3y = 3, \\ 3x + 10y + 5z = 7. \end{cases}$ **(б)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 15, \\ 7x + 8y + 9z = 24. \end{cases}$

(в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$

4. Проанализировав метод Гаусса, докажите следующие утверждения о СЛУ:

(а) Если в **однородной** СЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет решение, отличное от нулевого (следовательно, бесконечно много решений: ненулевое решение можно домножать на любую константу).

(б) Докажите, что если у **квадратной однородной** системы не одно решение, то одно из её уравнений следует из остальных, то есть множество его решений содержит пересечение множеств решений остальных.

(в) Пусть некоторая **квадратная однородная** СЛУ имеет единственное решение. Докажите, что любая **неоднородная** СЛУ с такой же левой частью имеет единственное решение.

(г) Предположим, что X_0 — множество решений некоторой **однородной** СЛУ. Докажите, что множество решений X некоторой **неоднородной** СЛУ с такой же левой частью либо пусто, либо представляется в виде $X = X_0 + x$, где x — произвольное решение СЛУ.

5. Докажите, что если у СЛУ с рациональными коэффициентами существует вещественное решение, то у неё есть хотя бы одно рациональное решение

6. Пусть множество решений двух эквивалентных СЛУ непусто. Верно ли, что эти СЛУ можно привести друг к другу элементарными преобразованиями строк, если разрешено убирать и добавлять уравнение $0 = 0$?

7. Имеется клетчатая таблица $(k+2)\times(l+2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

8. На плоскости даны 5 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует единственная кривая второго порядка (т.е. кривая, которая задаётся выражением $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ с точностью до умножения на константу), проходящая через них.

9. **(а)** У лаборанта есть 101 гирька. Оказалось, что если отложить любую гирьку, то остальные можно разложить на две группы по 50 равной массы. Докажите, что массы всех гирь равны, если массы гирек рациональные.

(б) Докажите то же самое для действительных масс.

СЛУ. Добавка

1. Имеется система уравнений

$$\begin{cases} *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0. \end{cases}$$

Два человека вписывают по очереди вместо звездочек числа. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

2. Даны три однородных квадратичных многочлена с вещественными коэффициентами: $P(u, v)$, $Q(u, v)$ и $R(u, v)$ (т. е. каждый из них имеет вид $Au^2 + Buv + Cv^2$). Докажите, что существует ненулевой однородный квадратичный многочлен $F(x, y, z)$ с вещественными коэффициентами такой, что $F(P(u, v), Q(u, v), R(u, v)) = 0$ при всех u и v.

3. Внутри отрезка $[0, 1]$ выбрали n различных точек. Отмеченной точкой назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных точках. Докажите, что все точки рациональны.

4. В вершинах правильного 101-угольника расставлены единицы. За один ход разрешается выбрать четыре подряд стоящие числа, вычесть по 1 из двух средних и прибавить по 1 к двум крайним. Можно ли не более чем за 10000 таких ходов получить расстановку, в которой все числа, кроме одного, равны нулю?

5. Квадрат со стороной 1 разрезан на квадраты. Докажите, что сторона каждого квадрата рациональна.

Линейные пространства

Определение. Даны множества V ("векторы") и поле $\mathbb{K}$ ("числа"), и задана операция сложения векторов и операция умножения вектора на число. Пусть при этом $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ выполнены следующие условия (они называются аксиомами векторного пространства):

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$;
2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$;
3. $\exists \vec{0} \in V : \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ (нулевой элемент);
4. $\exists (-\vec{x}) : (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (противоположный элемент);
5. $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$;
6. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$;
7. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$;
8. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.

Тогда V называется *линейным (векторным) пространством* над $\mathbb{K}$.

1. Какие из следующих множеств являются векторными пространствами относительно естественных операций? (Предъявите табличку с ответами «да» или «нет».)
(а) $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$, **(б)** Бесконечные последовательности вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$, **(в)** Ограниченные бесконечные последовательности рациональных чисел над полем $\mathbb{Q}$, **(г)** Нечётные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$. **(д)** Неубывающие бесконечные последовательности вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$, **(е)** Многочлены чётной степени с коэффициентами над полем $\mathbb{R}$. **(ж)** Многочлены степени ровно 100 с комплексными коэффициентами над полем $\mathbb{C}$, **(з)** Множество рациональных решений однородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{Q}$, **(и)** Множество вещественных решений неоднородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{R}$. **(к)** Выпуклые множества точек на плоскости относительно суммы Минковского над полем $\mathbb{R}$. **(л)** Многочлены, имеющие фиксированный корень x_0. **(м)** Полуинтервал $[0, 1)$ относительно операции сложения $a \oplus b = \{a + b\}$ и умножения на скаляр $\lambda \cdot a = \{\lambda a\}$, где $\{x\}$ - дробная часть x. **(н)** Функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зануляющиеся в бесконечном числе точек. **(о)** Множество неприводимых многочленов с коэффициентами в поле $\mathbb{R}$ и нуля над полем $\mathbb{R}$. **(п)** бесконечные периодические последовательности остатков по простому модулю p над полем $\mathbb{Z}_p$.

2. Докажите следующие свойства векторных пространств **(а)** Нулевой элемент единственный, **(б)** У каждого вектора есть единственный противоположный, **(в)** $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$, **(г)** $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$, **(д)** $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$.

Определение. Выражение вида $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Множество всех векторов такого вида называется *линейной оболочкой* векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

Определение. Набор векторов называется *линейно зависимым*, если существует линейная комбинация этих векторов равная $\vec{0}$, такая что не все $\lambda_i = 0$. В противном случае, вектора называются линейно независимыми.

Определение. Набор линейно независимых векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ называется *базисом*, если любой вектор $\vec{v} \in V$ представим в виде их линейной комбинации. Коэффициенты разложения вектора по базису называются *координатами* вектора в этом базисе.

3. **(а)** Пусть каждый из векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ представим в виде линейной комбинации векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$. Пусть $m > n$. Докажите, что векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ линейно зависимы.
(б) Теорема о базисе. Пусть векторное пространство V имеет два базиса $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ и $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$. Докажите, что $m = n$.

Определение. Число элементов в базисе называется размерностью пространства. (Бывают пространства с бесконечными базисами и, соответственно, с бесконечной размерностью. Мы их рассматривать не будем).

4. Пусть в пространстве размерности n выбрана линейно независимая система $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Докажите, что ее можно дополнить до базиса, то есть выбрать такие векторы $\vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \ldots, \vec{v}_n$, что набор $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ образует базис.

Определение. Подпространством линейного пространства V называется его любое непустое подмножество W, замкнутое относительно операций сложения векторов и умножения вектора на любое число. Легко проверить, что подпространство само является линейным пространством относительно индуцированных операций.

5. Предположим, что в линейном пространстве V зафиксирован базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.
(а) Докажите, что множество векторов, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \ldots + A_n \cdot x_n = 0$, где $A_i \in \mathbb{K}$ и не все равны 0, служит подпространством размерности $n - 1$ пространства V.
(б) Рассмотрим однородную систему линейных уравнений. Докажите, что множество векторов, координаты которых удовлетворяют системе, образуют подпространство в V некоторой размерности l.

Определение. Число $r = n - l$ называется *рангом* СЛУ.

Базис в пространстве решений называется *фундаментальной системой решений.*

6. **(а)** Докажите, что число свободных переменных, получаемых в методе Гаусса, равно l.
(б) Докажите, что максимальное число линейно независимых уравнений системы равно r.

7. Существуют ли многочлены $P(x), Q(x)$, а также функции $f(y), g(y)$, действующие из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, такие что $1 + xy + x^2y^2 = P(x)f(y) + Q(x)g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$?

Линейные отображения

Определение. Пусть даны два линейных пространства V, W над полем $\mathbb{K}$. Отображение $F : V \to W$ называется *линейным отображением*, если $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ и $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$:

$$F(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 F(\vec{v}_1) + \lambda_2 F(\vec{v}_2).$$

Биективное линейное отображение называют *изоморфизмом*.

1. **(а)** Пусть V, W — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$. Докажите, что множество $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ линейных отображений $F : V \to W$ относительно естественных операций сложения и умножения на скаляр является линейным пространством над $\mathbb{K}$.
   (б) Какова его размерность?

2. Докажите, что любое линейное пространство размерности n над $\mathbb{K}$ изоморфно $\mathbb{K}^n$. (В частности, отсюда следует, что любые два линейных пространства размерности n изоморфны друг другу.)

Определение. *Образом* линейного отображения $F : V \to W$ называется множество векторов $\vec{w} \in W$, для которых существует $\vec{v} \in V$ такой, что $F(\vec{v}) = \vec{w}$. Обозначение: $\mathrm{Im}\, F = \{\vec{w} \in W \mid \exists \vec{v} \in V,\ \vec{w} = F(\vec{v})\}$.

Определение. *Ядром* линейного отображения $F : V \to W$ называется множество векторов $\vec{v} \in V$, для которых $F(\vec{v}) = \vec{0}$. Обозначение: $\ker F = \{\vec{v} \in V \mid F(\vec{v}) = \vec{0}\}$.

3. Пусть $F : V \to W$ — линейное отображение. Докажите, что $\mathrm{Im}\, F$ является линейным подпространством в W, а $\ker F$ — линейным подпространством в V.

Определение. *Рангом* линейного отображения F называют размерность его образа.

Определение. Пусть U, V — линейные подпространства пространства W. Определим *сумму* линейных подпространств $U + V$ как множество всех векторов вида $\vec{u} + \vec{v}$, где $\vec{u} \in U$ и $\vec{v} \in V$.

Сумма линейных подпространств называется *прямой* (обозначение $U \oplus V$), если из равенства $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$ для любых $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ и $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ следует $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ и $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

4. Докажите, что сумма линейных подпространств является линейным подпространством.

5. Пусть нетождественный линейный оператор $P : V \to V$ таков, что $P^2 = P$ (такой оператор называется *проектором*). Докажите, что $V = \mathrm{Im}\, P \oplus \ker P$.

6. Пусть нетождественный линейный оператор $F : V \to V$ таков, что $F^2 = I$. Покажите, что $V = V_+ \oplus V_-$, где $V_\pm = \{v \in V \mid F(v) = \pm v\}$.

7. Пусть дано линейное отображение $F : V \to W$ ранга r. Докажите, что в пространстве V можно выбрать базис $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, а в пространстве W — базис

$\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ так, что $F(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, r$, а для $i > r$ выполнено $F(\vec{v}_i) = 0$.

8. Оператор $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ называется *нильпотентным*, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что сумма нильпотентных операторов A и B нильпотентна в следующих случаях:
(а) если $[A, B] = 0$?
(б) если $[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0$?

Здесь $[A, B] = AB - BA$.

9. Для любых трёх линейных операторов $A, B, C : V \to V$ докажите соотношения:
(а) $\dim \mathrm{Im}\, A = \dim \mathrm{Im}(BA) + \dim(\mathrm{Im}\, A \cap \ker B)$
(б) $\dim \mathrm{Im}(BA) + \dim(\mathrm{Im}\, AC) \leqslant \dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Im}(BAC)$

2 Геометрия

Коники. Начало

Определение 1

- *Эллипсом* с *фокусами* в точках F_1 и F_2 называется ГМТ X таких, что $F_1X + F_2X = \mathrm{const}$.
- *Гиперболой* с фокусами в точках F_1 и F_2 называется ГМТ X таких, что $|F_1X - F_2X| = \mathrm{const}$.
- *Параболой* с фокусом F и *директрисой* ℓ называется ГМТ X, для которых FX равно расстоянию от точки X до ℓ.

Определение 2

- Эллипсом называется кривая, которая в некоторой системе координат задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Гиперболой называется кривая, которая в некоторой системе координат задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Параболой называется кривая, которая в некоторой системе координат задана уравнением $y = ax^2$ для $a \neq 0$.

Определение 3. *Коника* — это невырожденная кривая, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, где f — многочлен второй степени. Вырожденные случаи: две прямые, одна прямая, точка, пустое множество. Невырожденные случаи: эллипс, гипербола, парабола.

Определение 4. Коникой с фокусом F, *директрисой* ℓ и *эксцентриситетом* $\varepsilon > 0$ называется ГМТ X, у которых отношение расстояний от X до F и до ℓ равно ε. При $\varepsilon > 1$ получается гипербола, при $\varepsilon = 1$ — парабола, при $\varepsilon < 1$ — эллипс.

Определение 5. Коника — это сечение бесконечного конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса.

Определение 6. Коника — это кривая, которая является образом окружности при проективном преобразовании.

У эллипса нет бесконечно удалённых точек, у параболы — одна, у гиперболы — две. Касательные к гиперболе в бесконечно удалённых точках называются *асимптотами* гиперболы.

Из определения 6 следует, что работают проективные теоремы, например, теоремы Паскаля и Брианшона. С помощью обратной теоремы Паскаля иногда бывает удобно доказывать, что точки лежат на одной конике.

Относительно коники можно определить поляру точки. Для четырёх точек, лежащих на конике, определено двойное отношение.

Утверждение. Через 5 точек общего положения проходит единственная коника.

Двойственное утверждение. Для любых 5 прямых общего положения существует единственная коника, которая их касается.

Двойственное утверждение следует, например, из того, что при полярном преобразовании относительно одной коники другая коника Γ переходит в конику Γ_1. Надо только правильно понимать это утверждение: образом коники Γ будет множество прямых, которые касаются коники Γ_1.

Оптическое свойство. Касательная к эллипсу (гиперболе) в точке X образует равные углы с прямыми F_1X и F_2X. Касательная к параболе в точке X, образует равные углы с прямой FX и осью симметрии параболы.

1. Касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точке P.
(а) Докажите, что углы F_1PX и F_2PY равны.
(б) Докажите, что F_1P — биссектриса угла XF_1Y.
(в) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для гиперболы (нарисуйте картинки, когда точки касания лежат на одной ветви гиперболы и на разных).
(г) Окружность касается эллипса в точках X и Y, причём центр окружности не лежит на прямой, проходящей через фокусы. Докажите, что X, Y, F_1, F_2 лежат на одной окружности.

2. **(а)** Фокус F эллипса проецируется на всевозможные касательные к эллипсу. Докажите, что проекции лежат на одной окружности.
(б) Докажите, аналогичное утверждение для гиперболы.
(в) Докажите, что ГМТ таких, что эллипс из них виден под прямым углом — это окружность.

3. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что существует коника с фокусами в точках P и Q, касающаяся прямых, содержащих стороны $ABCD$.

4. **(а)** Внутри параллелограмма $ABCD$ расположена точка P так, что $\angle BAP = \angle BCP$. Докажите, что $\angle ABP = \angle ADP$.
(б) Проекции двух точек на стороны четырёхугольника лежат на двух концентрических окружностях. Докажите, что этот четырёхугольник — параллелограмм.

5. *Лемма Фусса для коник.* Коника Γ пересекает окружность ω_1 в точках A, B, C_1, D_1, а окружность ω_2 — в точках A, B, C_2, D_2. Докажите, что $C_1D_1 \parallel C_2D_2$.

Добавка

1. Эллипс с фокусом F касается окружности ω в двух точках и лежит внутри ω. Докажите, что существует направленный угол φ такой, что для любой точки P окружности ω проходящая через P прямая ℓ, определённая равенством $\angle(FP, \ell) = \varphi$, касается эллипса.

2. Даны две окружности α и β, пересекающиеся в точках X и Y, и в «дольку» их пересечения вписан эллипс, дважды касающийся каждой из окружностей. Прямая ℓ_x касается эллипса, отделяет от него точку X и пересекает «дольку» в двух точках. Также прямая ℓ_x пересекает окружность α вне дольки в точке A_1 и пересекает окружность β вне дольки в точке B_1. Аналогично выберем прямую ℓ_y и определим точки A_2 и B_2. Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

3. Даны две пересекающиеся окружности. На одной из них выбрана точка A, на другой — точка B. Они начинают двигаться по окружностям по часовой стрелке с равными угловыми скоростями. Докажите, что прямая AB касается фиксированной коники.

4. Окружность, вписанная в неравнобедренный треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Три мухи ползли по прямым AA_1, BB_1 и CC_1 с постоянными скоростями так, что в какой–то момент они находились в точках A, B и C, а в другой момент были в точках A_1, B_1 и C_1. В некоторый момент времени все три мухи находились на прямой p_1, а в некоторый другой момент — на прямой p_2. Докажите, что $p_1 \perp p_2$.

Добавка к добавке

1. Серединный перпендикуляр к биссектрисе AL треугольника ABC пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно, а окружность (ABC) — в точках K и L. Касательные в точках P и Q к (ABC) пересекаются в точке R. Докажите, что окружности (ADE) и (PQR) касаются.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH. Переменная точка P такова, что биссектрисы углов PBC и PCB пересекаются на AH и пересекают стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Прямая EF пересекает AH в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от положения точки P.

Парабола

1. **(а)** Касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P, X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису. Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника $FX'Y'$.
(б) Докажите, что проекции фокуса параболы на её касательные лежат на прямой, касающейся параболы в вершине.
(в) Докажите, что множество точек, из которых парабола видна под прямым углом, есть её директриса.

2. Касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P.
(а) Докажите, что прямая, проходящая через P и середину XY, параллельна оси параболы.
(б) Докажите, что F — точка Болтая треугольника PXY.

3. Треугольник ABC описан вокруг параболы.
(а) Докажите, что фокус параболы лежит на окружности (ABC).
(б) Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на директрисе параболы.

4. **(а)** Докажите существование точки Микеля.
(б) Докажите существование прямой Обера (для четырёх прямых общего положения это прямая, на которой лежат ортоцентры образованных треугольников).
(в) Докажите существование прямой Гаусса и то, что она перпендикулярна прямой Обера.

5. **(а)** Точки A и B движутся линейно по двум пересекающимся прямым, причём в точку пересечения прямых точки приезжают не одновременно. Докажите, что прямая AB касается фиксированной параболы.
(б) Точки A и B движутся по двум прямым с сохранением двойных отношений, причём в точку пересечения прямых точки приезжают не одновременно. Докажите, что прямая AB касается фиксированной коники.

Следующие задачи надо решить, найдя в них параболу.

6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка X. Треугольник Δ образован биссектрисами углов ABC, ACB и AXC. Докажите, что ортоцентр треугольника Δ лежит на прямой BC.

7. **Теорема Дроз-Фарни.** Через ортоцентр треугольника ABC провели две перпендикулярные прямые, который высекли по отрезку на каждой прямой, содержащей сторону треугольника. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной прямой.

8. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках

K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC', проведенный через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведенный через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ, касается окружности Ω.

Равнобокие гиперболы

Гипербола называется *равнобокой* или *прямоугольной*, если её асимптоты перпендикулярны.

Утверждение. Коника проходит через вершины треугольника. Она является равнобокой гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через ортоцентр треугольника.

1. **(а)** Равнобокая гипербола Г описана около треугольника ABC и повторно пересекает окружность (ABC) в точке D. Пусть H_d и H_a — ортоцентры треугольников ABC и BCD соответственно. Докажите, что $AH_d = DH_a$. Выведите отсюда, что центр Г — это середина отрезка DH_d.
   (б) Докажите, что центр Г лежит на окружности Эйлера треугольника ABC.

2. **(а)** Четвёрка точек A, B, P, Q лежит на равнобокой гиперболе и отлична от ортоцентрической. Докажите, что P и Q симметричны относительно центра гиперболы тогда и только тогда, когда $\measuredangle APB = \measuredangle BQA$.
   (б) Точки P и Q симметричны относительно центра гиперболы. Докажите, что биссектрисы углов между прямыми AP и AQ параллельны асимптотам гиперболы.

Точки P и Q называются *антигонально сопряжёнными* относительно треугольника ABC, если точки A, B, C, P, Q лежат на равнобокой гиперболе и P и Q симметричны относительно центра этой гиперболы (для точек, лежащих на высотах треугольника ABC, вместо равнобокой гиперболы нужно рассмотреть пару перпендикулярных прямых). Если P совпадает с ортоцентром треугольника ABC, то антигонально сопряжённая ей точка не определена.

Исходя из предыдущей задачи и задачи 4а, можно дать альтернативные определения.

- Точки P и Q называются антигонально сопряжёнными относительно треугольника ABC, если $\measuredangle APB = \measuredangle BQA$, $\measuredangle CPA = \measuredangle AQC$, $\measuredangle BPC = \measuredangle CQB$.

- Точки P и Q называются антигонально сопряжёнными относительно треугольника ABC, если окружности, симметричные (APB), (APC), (BPC) относительно сторон AB, AC, BC соответственно, проходят через точку Q.

3. На равнобокой гиперболе Г, описанной около треугольника ABC, выбрана точка P. Докажите, что её педальная окружность проходит через центр Г.

4. **(а)** Точки A, B, C, D таковы, что прямые AB и CD, AC и BD, AD и BC не перпендикулярны. Докажите, что существует единственная проходящая через них равнобокая гипербола.
   (б) Точка Эйлера — Понселе. Дана четвёрка точек A, B, C, D, отличная от ортоцентрической, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что в одной точке пересекаются следующие окружности:

   - окружности Эйлера треугольников ABC, ABD, ACD, BCD;

- педальная окружность точки A относительно треугольника BCD и три аналогичных.

Лемма Соллертинского. Прямые ℓ_a и ℓ_b вращаются вокруг точек A и B соответственно, причём ℓ_b проективно зависит от ℓ_a. Тогда точка пересечения ℓ_a и ℓ_b движется проективно либо по конике, проходящей через A и B, либо по прямой (прямая получается, если в какой-то момент времени прямые ℓ_a и ℓ_b совпадают).

Из леммы следует полезное утверждение.

Утверждение. Образ при изогональном сопряжении прямой, не проходящей через вершины треугольника, — это коника, проходящая через вершины треугольника.

В частности, получаем, что образ пучка равнобоких гипербол, описанных около треугольника ABC, при изогональном сопряжении переходит в пучок прямых, проходящих через центр O окружности (ABC).

5. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором O — центр описанной окружности и $AB \neq AC$. Докажите, что ГМТ X таких, что $\measuredangle ABX = \measuredangle XCA$ — это равнобокая гипербола.

6. Прямая ℓ проходит через центр описанной окружности треугольника. Докажите, что педальные окружности точек, лежащих на ℓ, проходят через фиксированную точку, лежащую на окружности Эйлера.

Задачи

7. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle A = \angle B = \angle C$. Докажите, что вершина D лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H. Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность (BCD) в точках P и Q. Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$.

9. Точка X вне треугольника ABC такова, что A лежит внутри треугольника BXC и $2\angle XBA = \angle ACB$, $2\angle XCA = \angle ABC$. Докажите, что точка X и центры описанной и вневписанной со стороны BC окружностей треугольника ABC лежат на одной прямой.

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно так, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина MN и H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что $HK \perp CD$.

11. Дан треугольник ABC с ортоцентром H и точка K, не лежащая на высотах треугольника. Пусть точки D, E и F — ортоцентры треугольников AHK, BHK и CHK соответственно. Докажите, что площади треугольников ABC и DEF равны.

12. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, P — произвольная точка на окружности (ABC). Симедиана из вершины A треугольника APH пересекает BC в точке X. Симедиана из вершины B треугольника BPH пересекает CA в точке Y, симедиана из вершины C треугольника CPH пересекает AB в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

Добавка

1. **Точка Шиффлера.** Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABI, BCI, ACI, ABC пересекаются в одной точке.

2. На равнобокой гиперболе Γ, описанной около треугольника ABC, выбрана точка P. Докажите, что её чевианная окружность проходит через центр Γ.

3. Точки P и Q в треугольнике ABC таковы, что прямые, соединяющие P и Q с каждой из вершин, симметричны относительно соответствующих высот. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой Эйлера треугольника.

3 Комбинаторика

Вероятностный метод в комбинаторике

Дискретным *вероятностным пространством* называется конечное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлен вещественный вес p_i с условиями $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются *событиями*, элементы ω_i — *элементарными исходами*. Для каждого события $A \subset \Omega$ определена его *вероятность* $\mathsf{P}(A)$ посредством формулы $\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

Любая функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины $f(\omega)$ определено её *математическое ожидание*: $\mathbb{E}f = \sum_{i=1}^{n} p_i f(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин $f(\omega)$ и $g(\omega)$ и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены соотношения $\mathbb{E}(f + g) = \mathbb{E}f + \mathbb{E}g$, $\mathbb{E}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \mathbb{E}(f)$.

Каждому событию $A \subset \Omega$ можно сопоставить его *индикатор* — случайную величину $f_A(\omega)$, равную 1 для $\omega \in A$ и 0 для $\omega \in \Omega \backslash A$. Справедливо равенство $\mathsf{P}(A) = \mathbb{E}f_A$.

1. У Пети есть монетка, которая падает орлом вверх с вероятность 0.5. Петя проводит серию из n бросков.
(а) Посчитайте математическое ожидание числа выпавших орлов.
(б) Найдите математическое ожидание числа выпавших подряд орлов в самом начале серии бросков («длины орлового префикса»).

2. У двух равных правильных додекаэдров отметили по 9 вершин. Докажите, что первый додекаэдр можно так совместить со вторым, чтобы хотя бы пять его отмеченных вершин совпали с отмеченными вершинами второго. (В додекаэдре 12 пятиугольных граней, 20 вершин и 30 рёбер.)

3. Мастер раздачи кепок собрал кепки у n детей и случайно раздаёт их обратно — каждому по одной. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через a_k количество способов раздать кепки так, чтобы ровно k детей получили именно свою кепку. Докажите, что $\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k = n!$.

4. В однокруговом турнире по волейболу участвовали больше 100 команд. Множество из 100 команд называется *слабым*, если найдётся команда, которая выиграла у каждой из команд этого множества. Могло ли так оказаться, что вообще все 100-элементные множества команд — слабые? (В волейболе не бывает ничьих).

5. Дан набор A из n различных остатков по модулю n^2. Докажите, что существует такой набор B из n остатков по модулю n^2, что больше половины всех остатков по модулю n^2 представимы в виде $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

6. (*Финал-2024*) В стране $n > 100$ городов и пока нет дорог. Правительство случайно определяет стоимости строительства каждой из дорог, используя суммы от 1 до C_n^2 по одному разу (все варианты равновероятны). После этого мэр каждого города выбирает самую дешёвую из $(n-1)$ дорог, выходящих из его

города, и эта дорога строится. Найдите матожидание числа компонент связности полученного графа.

7. В классе каждому мальчику нравится хотя бы одна девочка. Докажите, что можно выделить не менее половины все детей так, чтобы каждому выделенному мальчику нравилось нечётное число выделенных девочек.

Вероятностный метод в комбинаторике, добавка

1. Дан граф на n вершинах, степени его вершин обозначены $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Докажите, что в графе найдётся независимое множество размера хотя бы $\sum \frac{1}{d_i+1}$.

2. Дано несколько различных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать не менее трети так, чтобы среди выбранных не нашлось тройки различных x, y, z таких, что $x + y = z$.

3. Докажите, что в n-мерном кубе можно отметить не менее $\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{\sqrt{3}})^n$ вершин так, чтобы для любых трёх различных отмеченных вершин A, B, C выполнялось $\angle ABC < 90^\circ$.

Геометрическая вероятность

1. Дана окружность радиуса 1. На ней по описанной ниже процедуре выбирается случайная хорда.
(а) Кидаются две точки независимо на окружность и соединяются хордой.
(б) Выбирается случайная точка M в круге, после чего восстанавливается хорда с серединой M.
(в) Выбирается случайный диаметр, далее на нём выбирается независимо случайная точка M, после чего восстанавливается хорда с серединой M.
Для каждой из трёх моделей определите, с какой вероятностью длина выбранной хорды окажется не меньше 1.

2. Два участника математических сборов договорились с промежуток с 02:00 до 02:01 пойти вместе попить воды из кулера. Каждый из них (независимо от второго) приходит в случайный момент времени этого промежутка, не спеша пьёт воду на протяжении 15 секунд и сразу уходит. С какой вероятностью они встретятся у кулера?

3. Из отрезка $[0,1]$ независимо выбираются три случайных числа a, b, c. С какой вероятностью из отрезков с длинами a, b, c можно составить треугольник?

4. Ваня закрасил 67% окружности рыжим цветом. Докажите, что в окружность можно вписать выпуклый девятиугольник так, чтобы все его вершины оказались рыжими и все его углы были кратны 15°.

5. На окружности независимо выбираются **(а)** 3; **(б)** n случайных точек. С какой вероятностью их выпуклая оболочка содержит центр окружности?

6. На плоскости даны 10 точек. Докажите, что их можно покрыть несколькими непересекающимися кругами радиуса 1. *Hint: как покрыть как можно бо́льшую долю точек плоскости непересекающимися кругами радиуса 1?*

7. На сфере радиуса 1 нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная длиной меньше 2π (звенья ломаной — дуги экваторов). Докажите, что существует полусфера, полностью содержащая ломаную.

8. Выпуклый многоугольник таков, что его проекция на любую прямую — это отрезок длины не больше 1. Докажите, что периметр многоугольника не больше π.

Геометрическая вероятность, добавка

1. В пространстве нарисовано n прямых. Докажите, что можно выбрать из них не менее $\frac{7}{24}n$, попарно не перпендикулярных друг другу.

2. На плоскости несколько кругов радиуса 1 в объединении образуют фигуру площади S. Докажите, что можно выбрать несколько кругов так, чтобы выбранные круги не пересекались попарно и покрывали площадь не менее $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}S$.

Линейная алгебра в комбинаторике

Пример 1. Есть таблица 8×8, изначально заполненная нулями. Разрешается выбрать любой квадрат 3×3 или 4×4 и прибавить ко всем его клеткам одинаковое действительное число. Все ли расстановки чисел можно получить?

Пример 2. Изначально все клетки доски 8×8 покрашены в белый цвет. За одну операцию разрешается целиком перекрашивать строку или столбец. Сколько различных раскрасок можно получить такими операциями?

Пример 3. Есть несколько лампочек и несколько кнопок. Каждая кнопка подсоединена к некоторому набору лампочек и при нажатии на неё состояние лампочек из этого набора меняется на противоположное. Подмножество лампочек назовём *инвариантным*, если каждая кнопка меняет состояния чётного числа лампочек этого подмножества. Докажите, что из одного состояния лампочек можно получить другое тогда и только тогда, когда у обоих состояний чётность числа включенных лампочек во всех инвариантных подмножествах совпадает.

1. В классе $n+1$ девочка и n мальчиков. Докажите, что можно выбрать непустое подмножество множества девочек так, чтобы каждый мальчик дружил с чётным количеством девочек из этого подмножества.

2. На кружке по математике n школьников решали $n+1$ задачу. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один школьник. Докажите, что можно назвать некоторые задачи интересными, а некоторые — скучными, и каждой задаче присвоить некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый школьник набрал за интересные задачи суммарно столько же баллов сколько за скучные. (Некоторые задачи могут быть не интересными и не скучными.)

3. Изначально все клетки доски 8×8 белые. За одну операцию разрешается перекрасить все клетки в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций все клетки можно перекрасить в чёрный цвет?

4. В клетчатом квадрате $n \times n$ (где $n > 1$) по линиям сетки (внутри квадрата или на его границе) проведены несколько контуров, каждый из которых ограничивает некоторый прямоугольник. Может ли оказаться, что через любую сторону любой клетки будет проходить нечётное число таких контуров?

5. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось хотя бы $(n+m-1)$ чисел.

6. В КИМах ЕГО (Единой Гос. Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может приписать положительные веса тестовым вопросам так, чтобы участники по первичным баллам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.

Линал в комбе, добавка

1. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.

2. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2026-элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было чётное число элементов, причём в пересечении любых двух подмножеств тоже было чётное число элементов?

3. Имеется доска 13×13, каждая клетка которой покрашена в чёрный или белый цвет. За один ход можно перекрасить (то есть белые заменить на чёрные, а чёрные — на белые) все клетки одного квадрата 2×2 или 9×9. Сколько различных раскрасок можно получить из начальной?

Часть II

Материалы группы 10–2

1 Алгебра

СЛУ

Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m. \end{cases}$$

Определение. Две СЛУ от переменных $x_1, \dots, x_n$ назовём **эквивалентными**, если у них совпадают множества решений.

Рассмотрим следующие элементарные преобразования:

- ЭП1: поменять местами две строки;
- ЭП2: умножить строку на ненулевое число;
- ЭП3: прибавить к строке другую строку, умноженную на число.

Утверждение. Если одна система линейных уравнений получается из другой путем применения ЭП1–ЭП3, то эти системы эквивалентны.

1. Верно ли обратное утверждение?

Определение. Система линейных уравнений называется **однородной**, если все $c_i = 0$.

Определение. Систему линейных уравнений, у которой уравнений столько же, сколько неизвестных, будем называть **квадратной**.

2. **(а)** Может ли однородная СЛУ быть эквивалентна неоднородной?
(б) Может ли квадратная СЛУ быть эквивалентна не квадратной?

Метод Гаусса. При помощи ЭП1–ЭП3 каждую систему линейных уравнений можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\begin{cases} b_{1k}x_k \; + \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; + \; b_{1n}x_n \; = \; d_1, \\ \qquad b_{2l}x_l + \; \cdots \; \cdots \; + \; b_{2n}x_n \; = \; d_2, \\ \qquad \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \\ \qquad\qquad b_{rs}x_s \; + \; \cdots \; + \; b_{rn}x_n \; = \; d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \; = \; d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \; = \; d_m. \end{cases}$$

где $b_{1k}, b_{2l}, \dots, b_{rs} \neq 0$, $k < l < \dots < s$.

3. Решите методом Гаусса следующие системы линейных уравнений:

(а) $\begin{cases} x + 3y + z = 1, \\ 2x + 7y + 3z = 2, \\ -x - 3y = 3, \\ 3x + 10y + 5z = 7. \end{cases}$ **(б)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 15, \\ 7x + 8y + 9z = 24. \end{cases}$

(в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$

4. Проанализировав метод Гаусса, докажите следующие утверждения о СЛУ:

(а) Если в **однородной** СЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет решение, отличное от нулевого (следовательно, бесконечно много решений: ненулевое решение можно домножать на любую константу).

(б) Докажите, что если у **квадратной однородной** системы не одно решение, то одно из её уравнений следует из остальных, то есть множество его решений содержит пересечение множеств решений остальных.

(в) Пусть некоторая **квадратная однородная** СЛУ имеет единственное решение. Докажите, что любая **неоднородная** СЛУ с такой же левой частью имеет единственное решение.

(г) Предположим, что X_0 — множество решений некоторой **однородной** СЛУ. Докажите, что множество решений X некоторой **неоднородной** СЛУ с такой же левой частью либо пусто, либо представляется в виде $X = X_0 + x$, где x — произвольное решение СЛУ.

5. Докажите, что если у СЛУ с рациональными коэффициентами существует вещественное решение, то у неё есть хотя бы одно рациональное решение

6. Имеется клетчатая таблица $(k+2)\times(l+2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

7. На плоскости даны 5 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует единственная кривая второго порядка (т.е. кривая, которая задаётся выражением $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ с точностью до умножения на константу), проходящая через них.

8. **(а)** У лаборанта есть 101 гирька. Оказалось, что если отложить любую гирьку, то остальные можно разложить на две группы по 50 равной массы. Докажите, что массы всех гирь равны, если массы гирек рациональные.

(б) Докажите то же самое для действительных масс.

СЛУ. Добавка

1. Имеется система уравнений

$$\begin{cases} *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0. \end{cases}$$

Два человека вписывают по очереди вместо звездочек числа. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

2. Даны три однородных квадратичных многочлена с вещественными коэффициентами: $P(u,v)$, $Q(u,v)$ и $R(u,v)$ (т. е. каждый из них имеет вид $Au^2 + Buv + Cv^2$). Докажите, что существует ненулевой однородный квадратичный многочлен $F(x,y,z)$ с вещественными коэффициентами такой, что $F(P(u,v), Q(u,v), R(u,v)) = 0$ при всех u и v.

3. Пусть множество решений двух эквивалентных СЛУ непусто. Верно ли, что эти СЛУ можно привести друг к другу элементарными преобразованиями строк, если разрешено убирать и добавлять уравнение $0 = 0$?

4. Внутри отрезка $[0,1]$ выбрали n различных точек. Отмеченной точкой назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных точках. Докажите, что все точки рациональны.

5. В вершинах правильного 101-угольника расставлены единицы. За один ход разрешается выбрать четыре подряд стоящие числа, вычесть по 1 из двух средних и прибавить по 1 к двум крайним. Можно ли не более чем за 10000 таких ходов получить расстановку, в которой все числа, кроме одного, равны нулю?

6. Квадрат со стороной 1 разрезан на квадраты. Докажите, что сторона каждого квадрата рациональна.

Линейные пространства

Определение. Даны множества V ("векторы") и поле $\mathbb{K}$ ("числа"), и задана операция сложения векторов и операция умножения вектора на число. Пусть при этом $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ выполнены следующие условия (они называются аксиомами векторного пространства):

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$;
2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$;
3. $\exists \vec{0} \in V : \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ (нулевой элемент);
4. $\exists (-\vec{x}) : (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (противоположный элемент);
5. $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$;
6. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$;
7. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$;
8. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.

Тогда V называется *линейным (векторным) пространством* над $\mathbb{K}$.

1. Какие из следующих множеств являются векторными пространствами относительно естественных операций? (Предъявите табличку с ответами «да» или «нет».)
(а) $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$, **(б)** Бесконечные последовательности вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$, **(в)** Ограниченные бесконечные последовательности рациональных чисел над полем $\mathbb{Q}$, **(г)** Неубывающие бесконечные последовательности вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$, **(д)** Многочлены степени ровно 100 с комплексными коэффициентами над полем $\mathbb{C}$, **(е)** Множество рациональных решений однородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{Q}$, **(ж)** Множество вещественных решений неоднородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{R}$.

2. Докажите следующие свойства векторных пространств **(а)** Нулевой элемент единственный, **(б)** У каждого вектора есть единственный противоположный, **(в)** $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$, **(г)** $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$, **(д)** $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$.

Определение. Выражение вида $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Множество всех векторов такого вида называется *линейной оболочкой* векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

Определение. Набор векторов называется *линейно зависимым*, если существует линейная комбинация этих векторов равная $\vec{0}$, такая что не все $\lambda_i = 0$. В противном случае, вектора называются линейно независимыми.

Определение. Набор линейно независимых векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ называется *базисом*, если любой вектор $\vec{v} \in V$ представим в виде их линейной комбинации.

3. Докажите, что любой вектор можно разложить по базису единственным способом.

Определение. Коэффициенты разложения вектора по базису называются *координатами* вектора в этом базисе.

4. **(а)** Пусть каждый из векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ представим в виде линейной комбинации векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$. Пусть $m > n$. Докажите, что векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ линейно зависимы.
(б) Теорема о базисе. Пусть векторное пространство V имеет два базиса $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ и $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$. Докажите, что $m = n$.

Определение. Число элементов в базисе называется размерностью пространства. (Бывают пространства с бесконечными базисами и, соответственно, с бесконечной размерностью. Мы их рассматривать не будем).

5. Пусть в пространстве размерности n выбрана линейно независимая система $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Докажите, что ее можно дополнить до базиса, то есть выбрать такие векторы $\vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \ldots, \vec{v}_n$, что набор $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ образует базис.

Определение. Подпространством линейного пространства V называется его любое непустое подмножество W, замкнутое относительно операций сложения векторов и умножения вектора на любое число. Легко проверить, что подпространство само является линейным пространством относительно индуцированных операций.

6. Предположим, что в линейном пространстве V зафиксирован базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.
(а) Докажите, что множество векторов, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \ldots + A_n \cdot x_n = 0$, где $A_i \in \mathbb{K}$ и не все равны 0, служит подпространством размерности $n-1$ пространства V.
(б) Рассмотрим однородную систему линейных уравнений. Докажите, что множество векторов, координаты которых удовлетворяют системе, образуют подпространство в V некоторой размерности l.

Определение. Число $r = n - l$ называется *рангом* СЛУ.

Базис в пространстве решений называется *фундаментальной системой решений.*

7. **(а)** Докажите, что число свободных переменных, получаемых в методе Гаусса, равно l.
(б) Докажите, что максимальное число линейно независимых уравнений системы равно r.

Линейные отображения

Определение. Пусть даны два линейных пространства V, W над полем $\mathbb{K}$. Отображение $F : V \to W$ называется *линейным отображением*, если $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ и $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$:

$$F(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 F(\vec{v}_1) + \lambda_2 F(\vec{v}_2).$$

Биективное линейное отображение называют *изоморфизмом.*

1. Пусть V, W — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$. Докажите, что множество $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ линейных отображений $F : V \to W$ относительно естественных операций сложения и умножения на скаляр является линейным пространством над $\mathbb{K}$.

2. Докажите, что любое линейное пространство размерности n над $\mathbb{K}$ изоморфно $\mathbb{K}^n$. (В частности, отсюда следует, что любые два линейных пространства размерности n изоморфны друг другу.)

Определение. *Образом* линейного отображения $F : V \to W$ называется множество векторов $\vec{w} \in W$, для которых существует $\vec{v} \in V$ такой, что $F(\vec{v}) = \vec{w}$. Обозначение: $\mathrm{Im}\, F = \{\vec{w} \in W \mid \exists \vec{v} \in V,\ \vec{w} = F(\vec{v})\}$.

Определение. *Ядром* линейного отображения $F : V \to W$ называется множество векторов $\vec{v} \in V$, для которых $F(\vec{v}) = \vec{0}$. Обозначение: $\ker F = \{\vec{v} \in V \mid F(\vec{v}) = \vec{0}\}$.

3. Пусть $F : V \to W$ — линейное отображение. Докажите, что $\mathrm{Im}\, F$ является линейным подпространством в W, а $\ker F$ — линейным подпространством в V.

Определение. *Рангом* линейного отображения F называют размерность его образа.

Определение. Пусть U, V — линейные подпространства пространства W. Определим *сумму* линейных подпространств $U + V$ как множество всех векторов вида $\vec{u} + \vec{v}$, где $\vec{u} \in U$ и $\vec{v} \in V$.

Сумма линейных подпространств называется *прямой* (обозначение $U \oplus V$), если из равенства $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$ для любых $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ и $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ следует $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ и $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

4. Докажите, что сумма линейных подпространств является линейным подпространством.

5. Пусть нетождественный линейный оператор $P : V \to V$ таков, что $P^2 = P$ (такой оператор называется *проектором*). Докажите, что $V = \mathrm{Im}\, P \oplus \ker P$.

6. Пусть нетождественный линейный оператор $F : V \to V$ таков, что $F^2 = I$. Покажите, что $V = V_+ \oplus V_-$, где $V_\pm = \{v \in V \mid F(v) = \pm v\}$.

7. Пусть дано линейное отображение $F : V \to W$ ранга r. Докажите, что в пространстве V можно выбрать базис $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, а в пространстве W — базис

$\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ так, что $F(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, r$, а для $i > r$ выполнено $F(\vec{v}_i) = 0$.

8. Оператор $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ называется *нильпотентным*, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что сумма нильпотентных операторов A и B нильпотентна в следующих случаях:
(а) если $[A, B] = 0$?
(б) если $[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0$?

Здесь $[A, B] = AB - BA$.

2 Геометрия

Коники. Начало

Определение 1

- *Эллипсом* с *фокусами* в точках F_1 и F_2 называется ГМТ X таких, что $F_1X + F_2X = \text{const}$.
- *Гиперболой* с фокусами в точках F_1 и F_2 называется ГМТ X таких, что $|F_1X - F_2X| = \text{const}$.
- *Параболой* с фокусом F и *директрисой* ℓ называется ГМТ X, для которых FX равно расстоянию от точки X до ℓ.

Определение 2

- Эллипсом называется кривая, которая в некоторой системе координат задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Гиперболой называется кривая, которая в некоторой системе координат задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Параболой называется кривая, которая в некоторой системе координат задана уравнением $y = ax^2$ для $a \neq 0$.

Определение 3. *Коника* — это невырожденная кривая, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, где f — многочлен второй степени. Вырожденные случаи: две прямые, одна прямая, точка, пустое множество. Невырожденные случаи: эллипс, гипербола, парабола.

Определение 4. Коникой с фокусом F, *директрисой* ℓ и *эксцентриситетом* $\varepsilon > 0$ называется ГМТ X, у которых отношение расстояний от X до F и до ℓ равно ε. При $\varepsilon > 1$ получается гипербола, при $\varepsilon = 1$ — парабола, при $\varepsilon < 1$ — эллипс.

Определение 5. Коника — это сечение бесконечного конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса.

Определение 6. Коника — это кривая, которая является образом окружности при проективном преобразовании.

У эллипса нет бесконечно удалённых точек, у параболы — одна, у гиперболы — две. Касательные к гиперболе в бесконечно удалённых точках называются *асимптотами* гиперболы.

Из определения 6 следует, что работают проективные теоремы, например, теоремы Паскаля и Брианшона. С помощью обратной теоремы Паскаля иногда бывает удобно доказывать, что точки лежат на одной конике.

Относительно коники можно определить поляру точки. Для четырёх точек, лежащих на конике, определено двойное отношение.

Утверждение. Через 5 точек общего положения проходит единственная коника.

Двойственное утверждение. Для любых 5 прямых общего положения существует единственная коника, которая их касается.

Двойственное утверждение следует, например, из того, что при полярном преобразовании относительно одной коники другая коника Γ переходит в конику Γ_1. Надо только правильно понимать это утверждение: образом коники Γ будет множество прямых, которые касаются коники Γ_1.

Оптическое свойство. Касательная к эллипсу (гиперболе) в точке X образует равные углы с прямыми F_1X и F_2X. Касательная к параболе в точке X, образует равные углы с прямой FX и осью симметрии параболы.

1. Касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точке P.
(а) Докажите, что углы F_1PX и F_2PY равны.
(б) Докажите, что F_1P — биссектриса угла XF_1Y.
(в) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для гиперболы (нарисуйте картинки, когда точки касания лежат на одной ветви гиперболы и на разных).
(г) Окружность касается эллипса в точках X и Y, причём центр окружности не лежит на прямой, проходящей через фокусы. Докажите, что X, Y, F_1, F_2 лежат на одной окружности.

2. **(а)** Фокус F эллипса проецируется на всевозможные касательные к эллипсу. Докажите, что проекции лежат на одной окружности.
(б) Докажите, аналогичное утверждение для гиперболы.
(в) Докажите, что ГМТ таких, что эллипс из них виден под прямым углом — это окружность.

3. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что существует коника с фокусами в точках P и Q, касающаяся прямых, содержащих стороны $ABCD$.

4. **(а)** Внутри параллелограмма $ABCD$ расположена точка P так, что $\angle BAP = \angle BCP$. Докажите, что $\angle ABP = \angle ADP$.
(б) Проекции двух точек на стороны четырёхугольника лежат на двух концентрических окружностях. Докажите, что этот четырёхугольник — параллелограмм.

5. *Лемма Фусса для коник.* Коника Γ пересекает окружность ω_1 в точках A, B, C_1, D_1, а окружность ω_2 — в точках A, B, C_2, D_2. Докажите, что $C_1D_1 \parallel C_2D_2$.

Добавка

1. Точка X лежит вне эллипса с фокусами F_1 и F_2. Прямые XF_1 и XF_2 пересекают эллипс в точках A, B, C, D. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке Y. Докажите, что XY — биссектриса угла F_1XF_2.

2. Эллипс с фокусом F касается окружности ω в двух точках и лежит внутри ω. Докажите, что существует направленный угол φ такой, что для любой точки P окружности ω проходящая через P прямая ℓ, определённая равенством $\angle(FP, \ell) = \varphi$, касается эллипса.

3. Даны две пересекающиеся окружности. На одной из них выбрана точка A, на другой — точка B. Они начинают двигаться по окружностям по часовой стрелке с равными угловыми скоростями. Докажите, что прямая AB касается фиксированной коники.

Парабола

1. **(а)** Касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P, X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису. Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника $FX'Y'$.
(б) Докажите, что проекции фокуса параболы на её касательные лежат на прямой, касающейся параболы в вершине.
(в) Докажите, что множество точек, из которых парабола видна под прямым углом, есть её директриса.

2. Касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P.
(а) Докажите, что прямая, проходящая через P и середину XY, параллельна оси параболы.
(б) Докажите, что F — точка Болтая треугольника PXY.

3. Треугольник ABC описан вокруг параболы.
(а) Докажите, что фокус параболы лежит на окружности (ABC).
(б) Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на директрисе параболы.

4. **(а)** Докажите существование точки Микеля.
(б) Докажите существование прямой Обера (для четырёх прямых общего положения это прямая, на которой лежат ортоцентры образованных треугольников).
(в) Докажите существование прямой Гаусса и то, что она перпендикулярна прямой Обера.

5. **(а)** Точки A и B движутся линейно по двум пересекающимся прямым, причём в точку пересечения прямых точки приезжают не одновременно. Докажите, что прямая AB касается фиксированной параболы.
(б) Точки A и B движутся по двум прямым с сохранением двойных отношений, причём в точку пересечения прямых точки приезжают не одновременно. Докажите, что прямая AB касается фиксированной коники.

Следующие задачи надо решить, найдя в них параболу.

6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка X. Треугольник Δ образован биссектрисами углов ABC, ACB и AXC. Докажите, что ортоцентр треугольника Δ лежит на прямой BC.

7. **Теорема Дроз-Фарни.** Через ортоцентр треугольника ABC провели две перпендикулярные прямые, который высекли по отрезку на каждой прямой, содержащей сторону треугольника. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной прямой.

8. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках

K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC', проведенный через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведенный через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ, касается окружности Ω.

Добавка

1. Окружность, вписанная в неравнобедренный треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Три мухи ползли по прямым AA_1, BB_1 и CC_1 с постоянными скоростями так, что в какой–то момент они находились в точках A, B и C, а в другой момент были в точках A_1, B_1 и C_1. В некоторый момент времени все три мухи находились на прямой p_1, а в некоторый другой момент — на прямой p_2. Докажите, что $p_1 \perp p_2$.

2. Две параболы касаются некоторой окружности — каждая в двух точках. Сами параболы пересекаются по четырем точкам — вершинам четырехугольника. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.

Равнобокие гиперболы

Гипербола называется *равнобокой* или *прямоугольной*, если её асимптоты перпендикулярны.

Утверждение. Коника проходит через вершины треугольника. Она является равнобокой гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через ортоцентр треугольника.

1. **(а)** Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Пусть H_a и H_b — ортоцентры треугольников BCD и ACD соответственно. Докажите, что $AH_b = BH_a$.
(б) Определим аналогично точки H_c и H_d. Докажите, что прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в одной точке.
(в) Равнобокая гипербола Γ описана около треугольника ABC и повторно пересекает окружность (ABC) в точке D. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что центр Γ — это середина отрезка HD.
(г) Докажите, что центр Γ лежит на окружности Эйлера треугольника ABC.

2. **(а)** Четвёрка точек A, B, P, Q лежит на равнобокой гиперболе и отлична от ортоцентрической. Докажите, что P и Q симметричны относительно центра гиперболы тогда и только тогда, когда $\measuredangle APB = \measuredangle BQA$.
(б) Точки P и Q симметричны относительно центра гиперболы. Докажите, что биссектрисы углов между прямыми AP и AQ параллельны асимптотам гиперболы.

Точки P и Q называются *антигонально сопряжёнными* относительно треугольника ABC, если точки A, B, C, P, Q лежат на равнобокой гиперболе и P и Q симметричны относительно центра этой гиперболы (для точек, лежащих на высотах треугольника ABC, вместо равнобокой гиперболы нужно рассмотреть пару перпендикулярных прямых; центр — это точка пересечения прямых). Если P совпадает с ортоцентром треугольника ABC, то антигонально сопряжённая ей точка не определена.

3. Точки A, B, C, D таковы, что прямые AB и CD, AC и BD, AD и BC не перпендикулярны. Докажите, что существует единственная проходящая через них равнобокая гипербола.

4. Докажите, что следующие определения эквивалентны ранее данному определению антигонально сопряжённых точек.

- Точки P и Q антигонально сопряжёны относительно треугольника ABC, если $\measuredangle APB = \measuredangle BQA$, $\measuredangle CPA = \measuredangle AQC$, $\measuredangle BPC = \measuredangle CQB$.
- Точки P и Q антигонально сопряжёны относительно треугольника ABC, если окружности, симметричные (APB), (APC), (BPC) относительно сторон AB, AC, BC соответственно, проходят через точку Q.

5. На равнобокой гиперболе Γ, описанной около треугольника ABC, выбрана точка P. Докажите, что её педальная окружность проходит через центр Γ.

6. **Точка Эйлера — Понселе.** Дана четвёрка точек A, B, C, D, отличная от ортоцентрической, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что в одной точке пересекаются следующие окружности:

   - окружности Эйлера треугольников ABC, ABD, ACD, BCD;
   - педальная окружность точки A относительно треугольника BCD и три аналогичных.

Лемма Соллертинского. Прямые ℓ_a и ℓ_b вращаются вокруг точек A и B соответственно, причём ℓ_b проективно зависит от ℓ_a. Тогда точка пересечения ℓ_a и ℓ_b движется проективно либо по конике, проходящей через A и B, либо по прямой (прямая получается, если в какой-то момент времени прямые ℓ_a и ℓ_b совпадают).

Из леммы следует полезное утверждение.

Утверждение. Образ при изогональном сопряжении прямой, не проходящей через вершины треугольника, — это коника, проходящая через вершины треугольника.

В частности, получаем, что образ пучка равнобоких гипербол, описанных около треугольника ABC, при изогональном сопряжении переходит в пучок прямых, проходящих через центр O окружности (ABC).

7. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором O — центр описанной окружности и $AB \neq AC$. Докажите, что ГМТ X таких, что $\measuredangle ABX = \measuredangle XCA$ — это равнобокая гипербола.

8. Прямая ℓ проходит через центр описанной окружности треугольника. Докажите, что педальные окружности точек, лежащих на ℓ, проходят через фиксированную точку, лежащую на окружности Эйлера.

Задачи

9. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle A = \angle B = \angle C$. Докажите, что вершина D лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

10. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H. Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность (BCD) в точках P и Q. Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$.

11. Точка X вне треугольника ABC такова, что A лежит внутри треугольника BXC и $2\angle XBA = \angle ACB$, $2\angle XCA = \angle ABC$. Докажите, что точка X и центры описанной и вневписанной со стороны BC окружностей треугольника ABC лежат на одной прямой.

12. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно так, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина MN и H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что $HK \perp CD$.

Добавка

1. Дан треугольник ABC с ортоцентром H и точка K, не лежащая на высотах треугольника. Пусть точки D, E и F — ортоцентры треугольников AHK, BHK и CHK соответственно. Докажите, что площади треугольников ABC и DEF равны.

2. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, P — произвольная точка на окружности (ABC). Симедиана из вершины A треугольника APH пересекает BC в точке X. Симедиана из вершины B треугольника BPH пересекает CA в точке Y, симедиана из вершины C треугольника CPH пересекает AB в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

3. **Точка Шиффлера.** Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABI, BCI, ACI, ABC пересекаются в одной точке.

3 Комбинаторика

Вероятностный метод в комбинаторике

Дискретным *вероятностным пространством* называется конечное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлен вещественный вес p_i с условиями $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются *событиями*, элементы ω_i — *элементарными исходами*. Для каждого события $A \subset \Omega$ определена его *вероятность* $\mathsf{P}(A)$ посредством формулы $\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

Любая функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины $f(\omega)$ определено её *математическое ожидание*: $\mathbb{E}f = \sum_{i=1}^n p_i f(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин $f(\omega)$ и $g(\omega)$ и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены соотношения $\mathbb{E}(f+g) = \mathbb{E}f + \mathbb{E}g$, $\mathbb{E}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \mathbb{E}(f)$.

Каждому событию $A \subset \Omega$ можно сопоставить его *индикатор* — случайную величину $f_A(\omega)$, равную 1 для $\omega \in A$ и 0 для $\omega \in \Omega \backslash A$. Справедливо равенство $\mathsf{P}(A) = \mathbb{E}f_A$.

1. У Пети есть монетка, которая падает орлом вверх с вероятность 0.5. Петя проводит серию из n бросков.
(а) Посчитайте математическое ожидание числа выпавших орлов.
(б) Найдите математическое ожидание числа выпавших подряд орлов в самом начале серии бросков («длины орлового префикса»).

2. У двух равных правильных додекаэдров отметили по 9 вершин. Докажите, что первый додекаэдр можно так совместить со вторым, чтобы хотя бы пять его отмеченных вершин совпали с отмеченными вершинами второго. (В додекаэдре 12 пятиугольных граней, 20 вершин и 30 рёбер.)

3. Мастер раздачи кепок собрал кепки у n детей и случайно раздаёт их обратно — каждому по одной. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через a_k количество способов раздать кепки так, чтобы ровно k детей получили именно свою кепку. Докажите, что $\sum_{k=1}^n k \cdot a_k = n!$.

4. В однокруговом турнире по волейболу участвовали больше 100 команд. Множество из 100 команд называется *слабым*, если найдётся команда, которая выиграла у каждой из команд этого множества. Могло ли так оказаться, что вообще все 100-элементные множества команд — слабые? (В волейболе не бывает ничьих).

5. Дан набор A из n различных остатков по модулю n^2. Докажите, что существует такой набор B из n остатков по модулю n^2, что больше половины всех остатков по модулю n^2 представимы в виде $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

6. (*Финал-2024*) В стране $n > 100$ городов и пока нет дорог. Правительство случайно определяет стоимости строительства каждой из дорог, используя суммы от 1 до C_n^2 по одному разу (все варианты равновероятны). После этого мэр каждого города выбирает самую дешёвую из $(n-1)$ дорог, выходящих из его

города, и эта дорога строится. Найдите матожидание числа компонент связности полученного графа.

7. В классе каждому мальчику нравится хотя бы одна девочка. Докажите, что можно выделить не менее половины все детей так, чтобы каждому выделенному мальчику нравилось нечётное число выделенных девочек.

Вероятностный метод в комбинаторике, добавка

1. Дан граф на n вершинах, степени его вершин обозначены $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Докажите, что в графе найдётся независимое множество размера хотя бы $\sum \frac{1}{d_i+1}$.

2. Дано несколько различных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать не менее трети так, чтобы среди выбранных не нашлось тройки различных x, y, z таких, что $x + y = z$.

3. Докажите, что в n-мерном кубе можно отметить не менее $\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{\sqrt{3}})^n$ вершин так, чтобы для любых трёх различных отмеченных вершин A, B, C выполнялось $\angle ABC < 90^\circ$.

Геометрическая вероятность

1. Дана окружность радиуса 1. На ней по описанной ниже процедуре выбирается случайная хорда.
(а) Кидаются две точки независимо на окружность и соединяются хордой.
(б) Выбирается случайная точка M в круге, после чего восстанавливается хорда с серединой M.
(в) Выбирается случайный диаметр, далее на нём выбирается независимо случайная точка M, после чего восстанавливается хорда с серединой M.
Для каждой из трёх моделей определите, с какой вероятностью длина выбранной хорды окажется не меньше 1.

2. Два участника математических сборов договорились с промежуток с 02:00 до 02:01 пойти вместе попить воды из кулера. Каждый из них (независимо от второго) приходит в случайный момент времени этого промежутка, не спеша пьёт воду на протяжении 15 секунд и сразу уходит. С какой вероятностью они встретятся у кулера?

3. Из отрезка $[0, 1]$ независимо выбираются три случайных числа a, b, c. С какой вероятностью из отрезков с длинами a, b, c можно составить треугольник?

4. Ваня закрасил 67% окружности рыжим цветом. Докажите, что в окружность можно вписать выпуклый девятиугольник так, чтобы все его вершины оказались рыжими и все его углы были кратны 15°.

5. На окружности независимо выбираются **(а)** 3; **(б)** n случайных точек. С какой вероятностью их выпуклая оболочка содержит центр окружности?

6. На плоскости даны 10 точек. Докажите, что их можно покрыть несколькими непересекающимися кругами радиуса 1. *Hint: как покрыть как можно бóльшую долю точек плоскости непересекающимися кругами радиуса 1?*

7. На сфере радиуса 1 нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная длиной меньше 2π (звенья ломаной — дуги экваторов). Докажите, что существует полусфера, полностью содержащая ломаную.

8. Выпуклый многоугольник таков, что его проекция на любую прямую — это отрезок длины не больше 1. Докажите, что периметр многоугольника не больше π.

Геометрическая вероятность, добавка

1. В пространстве нарисовано n прямых. Докажите, что можно выбрать из них не менее $\frac{7}{24}n$, попарно не перпендикулярных друг другу.

2. На плоскости несколько кругов радиуса 1 в объединении образуют фигуру площади S. Докажите, что можно выбрать несколько кругов так, чтобы выбранные круги не пересекались попарно и покрывали площадь не менее $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}S$.

Линейная алгебра в комбинаторике

Пример 1. Есть таблица 8×8, изначально заполненная нулями. Разрешается выбрать любой квадрат 3×3 или 4×4 и прибавить ко всем его клеткам одинаковое действительное число. Все ли расстановки чисел можно получить?

Пример 2. Изначально все клетки доски 8×8 покрашены в белый цвет. За одну операцию разрешается целиком перекрашивать строку или столбец. Сколько различных раскрасок можно получить такими операциями?

Пример 3. Есть несколько лампочек и несколько кнопок. Каждая кнопка подсоединена к некоторому набору лампочек и при нажатии на неё состояние лампочек из этого набора меняется на противоположное. Подмножество лампочек назовём *инвариантным*, если каждая кнопка меняет состояния чётного числа лампочек этого подмножества. Докажите, что из одного состояния лампочек можно получить другое тогда и только тогда, когда у обоих состояний чётность числа включенных лампочек во всех инвариантных подмножествах совпадает.

1. В классе $n+1$ девочка и n мальчиков. Докажите, что можно выбрать непустое подмножество множества девочек так, чтобы каждый мальчик дружил с чётным количеством девочек из этого подмножества.

2. На кружке по математике n школьников решали $n+1$ задачу. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один школьник. Докажите, что можно назвать некоторые задачи интересными, а некоторые — скучными, и каждой задаче присвоить некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый школьник набрал за интересные задачи суммарно столько же баллов сколько за скучные. (Некоторые задачи могут быть не интересными и не скучными.)

3. Изначально все клетки доски 8×8 белые. За одну операцию разрешается перекрасить все клетки в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций все клетки можно перекрасить в чёрный цвет?

4. В клетчатом квадрате $n \times n$ (где $n > 1$) по линиям сетки (внутри квадрата или на его границе) проведены несколько контуров, каждый из которых ограничивает некоторый прямоугольник. Может ли оказаться, что через любую сторону любой клетки будет проходить нечётное число таких контуров?

5. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось хотя бы $(n+m-1)$ чисел.

6. В КИМах ЕГО (Единой Гос. Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может приписать положительные веса тестовым вопросам так, чтобы участники по первичным баллам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.

Линал в комбе, добавка

1. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.

2. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2026-элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было чётное число элементов, причём в пересечении любых двух подмножеств тоже было чётное число элементов?

3. Имеется доска 13×13, каждая клетка которой покрашена в чёрный или белый цвет. За один ход можно перекрасить (то есть белые заменить на чёрные, а чёрные — на белые) все клетки одного квадрата 2×2 или 9×9. Сколько различных раскрасок можно получить из начальной?

Часть III

Материалы группы 10–3

1 Алгебра

СЛУ

Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m. \end{cases}$$

Определение. Две СЛУ от переменных $x_1, \dots, x_n$ назовём **эквивалентными**, если у них совпадают множества решений.

Рассмотрим следующие элементарные преобразования:

- ЭП1: поменять местами две строки;
- ЭП2: умножить строку на ненулевое число;
- ЭП3: прибавить к строке другую строку, умноженную на число.

Утверждение. Если одна система линейных уравнений получается из другой путем применения ЭП1–ЭП3, то эти системы эквивалентны.

1. Верно ли обратное утверждение?

Определение. Система линейных уравнений называется **однородной**, если все $c_i = 0$.

Определение. Систему линейных уравнений, у которой уравнений столько же, сколько неизвестных, будем называть **квадратной**.

2. **(а)** Может ли однородная СЛУ быть эквивалентна неоднородной?
(б) Может ли квадратная СЛУ быть эквивалентна не квадратной?

Метод Гаусса. При помощи ЭП1–ЭП3 каждую систему линейных уравнений можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\begin{cases} b_{1k}x_k + \cdots \cdots \cdots + b_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad b_{2l}x_l + \cdots \cdots + b_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \qquad\quad b_{rs}x_s + \cdots + b_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_m. \end{cases}$$

где $b_{1k}, b_{2l}, \dots, b_{rs} \neq 0$, $k < l < \dots < s$.

3. Решите методом Гаусса следующие системы линейных уравнений:

(а) $\begin{cases} x+3y+z=1, \\ 2x+7y+3z=2, \\ -x-3y=3, \\ 3x+10y+5z=7. \end{cases}$ **(б)** $\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x+5y+6z=15, \\ 7x+8y+9z=24. \end{cases}$

(в) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+4x_2+4x_3+5x_4=5, \\ 3x_1+x_2+5x_3+x_4=0, \\ 3x_1+x_2+7x_3+4x_4=5. \end{cases}$

4. Проанализировав метод Гаусса, докажите следующие утверждения о СЛУ:

(а) Если в **однородной** СЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет решение, отличное от нулевого (следовательно, бесконечно много решений: ненулевое решение можно домножать на любую константу).

(б) Докажите, что если у **квадратной однородной** системы не одно решение, то одно из её уравнений следует из остальных, то есть множество его решений содержит пересечение множеств решений остальных.

(в) Пусть некоторая **квадратная однородная** СЛУ имеет единственное решение. Докажите, что любая **неоднородная** СЛУ с такой же левой частью имеет единственное решение.

(г) Предположим, что X_0 — множество решений некоторой **однородной** СЛУ. Докажите, что множество решений X некоторой **неоднородной** СЛУ с такой же левой частью либо пусто, либо представляется в виде $X = X_0 + x$, где x — произвольное решение СЛУ.

5. Докажите, что если у СЛУ с рациональными коэффициентами существует вещественное решение, то у неё есть хотя бы одно рациональное решение

6. Имеется клетчатая таблица $(k+2)\times(l+2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k\times l$ можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

7. На плоскости даны 5 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует единственная кривая второго порядка (т.е. кривая, которая задаётся выражением $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ с точностью до умножения на константу), проходящая через них.

8. **(а)** У лаборанта есть 101 гирька. Оказалось, что если отложить любую гирьку, то остальные можно разложить на две группы по 50 равной массы. Докажите, что массы всех гирь равны, если массы гирек рациональные.

(б) Докажите то же самое для действительных масс.

Линейные пространства

Определение. Даны множества V ("векторы") и поле $\mathbb{K}$ ("числа"), и задана операция сложения векторов и операция умножения вектора на число. Пусть при этом $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ выполнены следующие условия (они называются аксиомами векторного пространства):

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$;
2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$;
3. $\exists \vec{0} \in V : \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ (нулевой элемент);
4. $\exists (-\vec{x}) : (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (противоположный элемент);
5. $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$;
6. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$;
7. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$;
8. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.

Тогда V называется *линейным (векторным) пространством* над $\mathbb{K}$.

1. Какие из следующих множеств являются векторными пространствами относительно естественных операций? (Предъявите табличку с ответами «да» или «нет».)
(а) $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$, **(б)** Бесконечные последовательности вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$, **(в)** Ограниченные бесконечные последовательности рациональных чисел над полем $\mathbb{Q}$, **(г)** Неубывающие бесконечные последовательности вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$, **(д)** Многочлены степени ровно 100 с комплексными коэффициентами над полем $\mathbb{C}$, **(е)** Множество рациональных решений однородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{Q}$, **(ж)** Множество вещественных решений неоднородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{R}$.

2. Докажите следующие свойства векторных пространств **(а)** Нулевой элемент единственный, **(б)** У каждого вектора есть единственный противоположный, **(в)** $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$, **(г)** $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$, **(д)** $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$.

Определение. Выражение вида $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Множество всех векторов такого вида называется *линейной оболочкой* векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

Определение. Набор векторов называется *линейно зависимым*, если существует линейная комбинация этих векторов равная $\vec{0}$, такая что не все $\lambda_i = 0$. В противном случае, вектора называются линейно независимыми.

Определение. Набор линейно независимых векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ называется *базисом*, если любой вектор $\vec{v} \in V$ представим в виде их линейной комбинации.

3. Докажите, что любой вектор можно разложить по базису единственным способом.

Определение. Коэффициенты разложения вектора по базису называются *координатами* вектора в этом базисе.

4. **(а)** Пусть каждый из векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ представим в виде линейной комбинации векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$. Пусть $m > n$. Докажите, что векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ линейно зависимы.
(б) Теорема о базисе. Пусть векторное пространство V имеет два базиса $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ и $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$. Докажите, что $m = n$.

Определение. Число элементов в базисе называется размерностью пространства. (Бывают пространства с бесконечными базисами и, соответственно, с бесконечной размерностью. Мы их рассматривать не будем).

5. Пусть в пространстве размерности n выбрана линейно независимая система $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Докажите, что ее можно дополнить до базиса, то есть выбрать такие векторы $\vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \ldots, \vec{v}_n$, что набор $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ образует базис.

Определение. Подпространством линейного пространства V называется его любое непустое подмножество W, замкнутое относительно операций сложения векторов и умножения вектора на любое число. Легко проверить, что подпространство само является линейным пространством относительно индуцированных операций.

6. Предположим, что в линейном пространстве V зафиксирован базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.
(а) Докажите, что множество векторов, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \ldots + A_n \cdot x_n = 0$, где $A_i \in \mathbb{K}$ и не все равны 0, служит подпространством размерности $n-1$ пространства V.
(б) Рассмотрим однородную систему линейных уравнений. Докажите, что множество векторов, координаты которых удовлетворяют системе, образуют подпространство в V некоторой размерности l.

Определение. Число $r = n - l$ называется *рангом* СЛУ.

Базис в пространстве решений называется *фундаментальной системой решений.*

7. **(а)** Докажите, что число свободных переменных, получаемых в методе Гаусса, равно l.
(б) Докажите, что максимальное число линейно независимых уравнений системы равно r.

Линейные отображения

Определение. Пусть даны два линейных пространства V, W над полем $\mathbb{K}$. Отображение $F : V \to W$ называется *линейным отображением*, если $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ и $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$:

$$F(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 F(\vec{v}_1) + \lambda_2 F(\vec{v}_2).$$

Биективное линейное отображение называют *изоморфизмом*.

1. Докажите, что данные отображение являются линейными:
(а) $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где R_α поворот вектора вокруг начала координат на угол α,
(б) $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$, где $\frac{d}{dx}$ взятие производной по x, $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — множество многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n.
(в) Отображение из векторного пространства последовательностей вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$ в себя, действующее следующим образом: $\{a_n\} \to \{b_n\}$, где $b_n = a_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$,
(г) Отображение из множества функций на $\mathbb{R}$ в себя, действующее следующим образом: $f(x) \to \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

2. Пусть V, W — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$. Докажите, что множество $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ линейных отображений $F : V \to W$ относительно естественных операций сложения и умножения на скаляр является линейным пространством над $\mathbb{K}$.

3. Докажите, что любое линейное пространство размерности n над $\mathbb{K}$ изоморфно $\mathbb{K}^n$. (В частности, отсюда следует, что любые два линейных пространства размерности n изоморфны друг другу.)

Определение. *Образом* линейного отображения $F : V \to W$ называется множество векторов $\vec{w} \in W$, для которых существует $\vec{v} \in V$ такой, что $F(\vec{v}) = \vec{w}$. Обозначение: $\mathrm{Im}\, F = \{\vec{w} \in W \mid \exists \vec{v} \in V,\ \vec{w} = F(\vec{v})\}$.

Определение. *Ядром* линейного отображения $F : V \to W$ называется множество векторов $\vec{v} \in V$, для которых $F(\vec{v}) = \vec{0}$. Обозначение: $\ker F = \{\vec{v} \in V \mid F(\vec{v}) = \vec{0}\}$.

4. Пусть $F : V \to W$ — линейное отображение. Докажите, что $\mathrm{Im}\, F$ является линейным подпространством в W, а $\ker F$ — линейным подпространством в V.

5. Найдите образы и ядра отображений из задачи 1.

Определение. Пусть U, V — линейные подпространства пространства W. Определим *сумму* линейных подпространств $U + V$ как множество всех векторов вида $\vec{u} + \vec{v}$, где $\vec{u} \in U$ и $\vec{v} \in V$.

Сумма линейных подпространств называется *прямой* (обозначение $U \oplus V$), если из равенства $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$ для любых $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ и $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ следует $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ и $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

6. Докажите, что сумма линейных подпространств является линейным подпространством.

7. Пусть нетождественный линейный оператор $P : V \to V$ таков, что $P^2 = P$ (такой оператор называется *проектором*). Докажите, что $V = \operatorname{Im} P \oplus \ker P$.

8. Пусть нетождественный линейный оператор $F : V \to V$ таков, что $F^2 = I$. Покажите, что $V = V_+ \oplus V_-$, где $V_\pm = \{v \in V \mid F(v) = \pm v\}$.

Определение. *Рангом* линейного отображения F называют размерность его образа.

9. Пусть дано линейное отображение $F : V \to W$ ранга r. Докажите, что в пространстве V можно выбрать базис $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, а в пространстве W — базис $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ так, что $F(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, r$, а для $i > r$ выполнено $F(\vec{v}_i) = 0$.

2 Геометрия

Коники. Начало

Определение 1

- *Эллипсом* с *фокусами* в точках F_1 и F_2 называется ГМТ X таких, что $F_1X + F_2X = \mathrm{const}$.
- *Гиперболой* с фокусами в точках F_1 и F_2 называется ГМТ X таких, что $|F_1X - F_2X| = \mathrm{const}$.
- *Параболой* с фокусом F и *директрисой* ℓ называется ГМТ X, для которых FX равно расстоянию от точки X до ℓ.

Определение 2

- Эллипсом называется кривая, которая в некоторой системе координат задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Гиперболой называется кривая, которая в некоторой системе координат задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Параболой называется кривая, которая в некоторой системе координат задана уравнением $y = ax^2$ для $a \neq 0$.

Определение 3. *Коника* — это невырожденная кривая, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, где f — многочлен второй степени. Вырожденные случаи: две прямые, одна прямая, точка, пустое множество. Невырожденные случаи: эллипс, гипербола, парабола.

Определение 4. Коникой с фокусом F, *директрисой* ℓ и *эксцентриситетом* $\varepsilon > 0$ называется ГМТ X, у которых отношение расстояний от X до F и до ℓ равно ε. При $\varepsilon > 1$ получается гипербола, при $\varepsilon = 1$ — парабола, при $\varepsilon < 1$ — эллипс.

Определение 5. Коника — это сечение бесконечного конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса.

Определение 6. Коника — это кривая, которая является образом окружности при проективном преобразовании.

У эллипса нет бесконечно удалённых точек, у параболы — одна, у гиперболы — две. Касательные к гиперболе в бесконечно удалённых точках называются *асимптотами* гиперболы.

Из определения 6 следует, что работают проективные теоремы, например, теоремы Паскаля и Брианшона. С помощью обратной теоремы Паскаля иногда бывает удобно доказывать, что точки лежат на одной конике.

Утверждение 1. Через 5 точек общего положения проходит единственная коника.

Утверждение 2. Для любых 5 прямых общего положения существует единственная коника, которая их касается.

Оптическое свойство. Касательная к эллипсу (гиперболе) в точке X образует равные углы с прямыми F_1X и F_2X. Касательная к параболе в точке X, образует равные углы с прямой FX и осью симметрии параболы.

1. Докажите оптическое свойство гиперболы.

2. Докажите, что эллипс и гипербола, у которых совпадают фокусы, пересекаются под прямым углом (углом между двумя кривыми в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в этой точке).

3. Хорда XY проходит через фокус эллипса F. Касательные в точках X и Y пересекаются в точке P. Докажите, что $PF \perp XY$.

4. Касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точке P.
(а) Докажите, что углы F_1PX и F_2PY равны.
(б) Докажите, что F_1P — биссектриса угла XF_1Y.
(в) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для гиперболы (нарисуйте картинки, когда точки касания лежат на одной ветви гиперболы и на разных).
(г) Окружность касается эллипса в точках X и Y, причём центр окружности не лежит на прямой, проходящей через фокусы. Докажите, что X, Y, F_1, F_2 лежат на одной окружности.

5. **(а)** Фокус F эллипса проецируется на всевозможные касательные к эллипсу. Докажите, что проекции лежат на одной окружности.
(б) Докажите, аналогичное утверждение для гиперболы.
(в) Докажите, что ГМТ таких, что эллипс из них виден под прямым углом — это окружность.

Добавка

1. Точка X лежит вне эллипса с фокусами F_1 и F_2. Прямые XF_1 и XF_2 пересекают эллипс в точках A, B, C, D. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке Y. Докажите, что XY — биссектриса угла F_1XF_2.

2. **(а)** Внутри параллелограмма $ABCD$ расположена точка P так, что $\angle BAP = \angle BCP$. Докажите, что $\angle ABP = \angle ADP$.
(б) Проекции двух точек на стороны четырёхугольника лежат на двух концентрических окружностях. Докажите, что этот четырёхугольник — параллелограмм.

3. Эллипс с фокусом F касается окружности ω в двух точках и лежит внутри ω. Докажите, что существует направленный угол φ такой, что для любой точки P окружности ω проходящая через P прямая ℓ, определённая равенством $\angle(FP, \ell) = \varphi$, касается эллипса.

Парабола

1. Докажите оптическое свойство параболы: касательная к параболе в точке X, образует равные углы с прямой FX и осью симметрии параболы.

2. **(а)** Касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P, X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису. Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника $FX'Y'$.
(б) Докажите, что проекции фокуса параболы на её касательные лежат на прямой, касающейся параболы в вершине.
(в) Докажите, что множество точек, из которых парабола видна под прямым углом, есть её директриса.

3. Касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P.
(а) Докажите, что прямая, проходящая через P и середину M отрезка XY, параллельна оси параболы.
(б) Докажите, что $\angle XPF = \angle YPM$.
(в) Докажите, что FP — биссектриса угла XPY.

4. Треугольник ABC описан вокруг параболы.
(а) Докажите, что фокус параболы лежит на окружности (ABC). Чем будет прямая Симсона точки F относительно треугольника ABC?
(б) Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на директрисе параболы.

Как мы обсуждали ранее, для любых 5 прямых общего положения существует единственная коника, которая их касается. Если одна из этих прямых бесконечно удалённая, то получаем такое утверждение: для любых 4 прямых общего положения существует единственная парабола, которая их касается.

5. Даны 4 прямые общего положения.
(а) Докажите существование точки Микеля (точка пересечения описанных окружностей четырёх образованных треугольников).
(б) Докажите существование прямой Обера (для четырёх прямых общего положения это прямая, на которой лежат ортоцентры образованных треугольников).
(в) Докажите существование прямой Гаусса и то, что она перпендикулярна прямой Обера.

6. Точки A и B движутся с постоянными скоростями по двум пересекающимся прямым, причём в точку пересечения прямых точки приезжают не одновременно. Докажите, что прямая AB касается фиксированной параболы.

7. **Теорема Дроз-Фарни.** Через ортоцентр треугольника ABC провели две перпендикулярные прямые, который высекли по отрезку на каждой прямой, содержащей сторону треугольника. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной прямой.

Равнобокие гиперболы

Тут нет гипербол

1. **(а)** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Пусть H_a и H_b — ортоцентры треугольников BCD и ACD соответственно. Докажите, что $AH_b = BH_a$.
(б) Определим аналогично точки H_c и H_d. Докажите, что прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в одной точке (обозначим её через H).
(в) Из середины каждой стороны опустили перпендикуляр на противоположную сторону. Докажите, что они пересекаются в точке H.
(г) Докажите, что окружности Эйлера треугольников ABC, ABD, ACD, BCD проходят через H.
(д) Докажите, что прямая Симсона точки A относительно треугольника BCD и три аналогичных проходят через точку H.
(е) Как известно, прямые, соединяющие середины противоположных сторон и середины диагоналей, пересекаются в одной точке. Обозначим её через M. Докажите, что точки H, M, O лежат на одной прямой. Чему равно отношение $HM : MO$?

А тут есть

Теперь мы посмотрим на эту же картинку, но под другим углом и в более общей постановке. Для этого нам понадобятся коники.

Определение. Гипербола называется *равнобокой* или *прямоугольной*, если её асимптоты перпендикулярны.

2. **(а)** Равнобокая гипербола Γ проходит через вершины треугольника ABC. Докажите, что она проходит и через его ортоцентр H. (*Указание: вам помогут декарты или теорема Паскаля.*)
(б) Докажите, что если коника Γ проходит через точки A, B, C, H, то Γ — равнобокая гипербола. (*Указание: тут в декартах будет больно, а с теоремой Паскаля — нет.*)
(в) Пусть D — четвёртая точка пересечения Γ с (ABC). Докажите, что центр Γ — это середина отрезка HD. (*Указание: вам поможет первая задача.*)
(г) Докажите, что центр Γ лежит на окружности Эйлера треугольника ABC.

3. **(а)** Четвёрка точек A, B, P, Q лежит на равнобокой гиперболе и отлична от ортоцентрической. Докажите, что P и Q симметричны относительно центра гиперболы тогда и только тогда, когда $\measuredangle APB = \measuredangle BQA$.
(б) Точки P и Q симметричны относительно центра гиперболы. Докажите, что биссектрисы углов между прямыми AP и AQ параллельны асимптотам гиперболы.

4. Точки A, B, C, D таковы, что прямые AB и CD, AC и BD, AD и BC не перпендикулярны. Докажите, что существует единственная проходящая через них равнобокая гипербола.

5. Дан треугольник ABC и точки P и Q, не лежащие на его высотах, такие, что $\measuredangle APB = \measuredangle BQA$, $\measuredangle CPA = \measuredangle AQC$, $\measuredangle BPC = \measuredangle CQB$ (альтернативное описание — окружности, симметричные (APB), (APC), (BPC) относительно соответствующих сторон пересекаются в точке Q). Докажите, что точки A, B, C, P, Q лежат на одной гиперболе, причём P и Q симметричны относительно её центра.

6. На равнобокой гиперболе Г, описанной около треугольника ABC, выбрана точка P. Докажите, что её педальная окружность проходит через центр Г.

7. **Точка Эйлера — Понселе.** Дана четвёрка точек A, B, C, D, отличная от ортоцентрической, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что в одной точке пересекаются следующие окружности:

- окружности Эйлера треугольников ABC, ABD, ACD, BCD;
- педальная окружность точки A относительно треугольника BCD и три аналогичных.

Добавка

1. Дан треугольник ABC с ортоцентром H и точка K, не лежащая на высотах треугольника. Пусть точки D, E и F — ортоцентры треугольников AHK, BHK и CHK соответственно. Докажите, что площади треугольников ABC и DEF равны.

2. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, P — произвольная точка на окружности (ABC). Симедиана из вершины A треугольника APH пересекает BC в точке X. Симедиана из вершины B треугольника BPH пересекает CA в точке Y, симедиана из вершины C треугольника CPH пересекает AB в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

3 Комбинаторика

Вероятностный метод в комбинаторике

Дискретным *вероятностным пространством* называется конечное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлен вещественный вес p_i с условиями $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются *событиями*, элементы ω_i — *элементарными исходами*. Для каждого события $A \subset \Omega$ определена его *вероятность* $\mathsf{P}(A)$ посредством формулы $\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

Любая функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины $f(\omega)$ определено её *математическое ожидание*: $\mathbb{E}f = \sum_{i=1}^{n} p_i f(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин $f(\omega)$ и $g(\omega)$ и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены соотношения $\mathbb{E}(f+g) = \mathbb{E}f + \mathbb{E}g$, $\mathbb{E}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \mathbb{E}(f)$.

Каждому событию $A \subset \Omega$ можно сопоставить его *индикатор* — случайную величину $f_A(\omega)$, равную 1 для $\omega \in A$ и 0 для $\omega \in \Omega \backslash A$. Справедливо равенство $\mathsf{P}(A) = \mathbb{E}f_A$.

1. У Пети есть монетка, которая падает орлом вверх с вероятность 0.5. Петя проводит серию из n бросков.
(а) Посчитайте математическое ожидание числа выпавших орлов.
(б) Найдите математическое ожидание числа выпавших подряд орлов в самом начале серии бросков («длины орлового префикса»).

2. У двух равных правильных додекаэдров отметили по 9 вершин. Докажите, что первый додекаэдр можно так совместить со вторым, чтобы хотя бы пять его отмеченных вершин совпали с отмеченными вершинами второго. (В додекаэдре 12 пятиугольных граней, 20 вершин и 30 рёбер.)

3. Мастер раздачи кепок собрал кепки у n детей и случайно раздаёт их обратно — каждому по одной. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через a_k количество способов раздать кепки так, чтобы ровно k детей получили именно свою кепку. Докажите, что $\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k = n!$.

4. В однокруговом турнире по волейболу участвовали больше 100 команд. Множество из 100 команд называется *слабым*, если найдётся команда, которая выиграла у каждой из команд этого множества. Могло ли так оказаться, что вообще все 100-элементные множества команд — слабые? (В волейболе не бывает ничьих).

5. Дан набор A из n различных остатков по модулю n^2. Докажите, что существует такой набор B из n остатков по модулю n^2, что больше половины всех остатков по модулю n^2 представимы в виде $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

6. (*Финал-2024*) В стране $n > 100$ городов и пока нет дорог. Правительство случайно определяет стоимости строительства каждой из дорог, используя суммы от 1 до C_n^2 по одному разу (все варианты равновероятны). После этого мэр каждого города выбирает самую дешёвую из $(n-1)$ дорог, выходящих из его

города, и эта дорога строится. Найдите матожидание числа компонент связности полученного графа.

7. В классе каждому мальчику нравится хотя бы одна девочка. Докажите, что можно выделить не менее половины все детей так, чтобы каждому выделенному мальчику нравилось нечётное число выделенных девочек.

Вероятностный метод в комбинаторике, добавка

1. Дан граф на n вершинах, степени его вершин обозначены $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Докажите, что в графе найдётся независимое множество размера хотя бы $\sum \frac{1}{d_i+1}$.

2. Дано несколько различных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать не менее трети так, чтобы среди выбранных не нашлось тройки различных x, y, z таких, что $x + y = z$.

3. Докажите, что в n-мерном кубе можно отметить не менее $\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{\sqrt{3}})^n$ вершин так, чтобы для любых трёх различных отмеченных вершин A, B, C выполнялось $\angle ABC < 90^\circ$.

Геометрическая вероятность

1. Дана окружность радиуса 1. На ней по описанной ниже процедуре выбирается случайная хорда.
(а) Кидаются две точки независимо на окружность и соединяются хордой.
(б) Выбирается случайная точка M в круге, после чего восстанавливается хорда с серединой M.
(в) Выбирается случайный диаметр, далее на нём выбирается независимо случайная точка M, после чего восстанавливается хорда с серединой M.
Для каждой из трёх моделей определите, с какой вероятностью длина выбранной хорды окажется не меньше 1.

2. Два участника математических сборов договорились с промежуток с 02:00 до 02:01 пойти вместе попить воды из кулера. Каждый из них (независимо от второго) приходит в случайный момент времени этого промежутка, не спеша пьёт воду на протяжении 15 секунд и сразу уходит. С какой вероятностью они встретятся у кулера?

3. Из отрезка $[0, 1]$ независимо выбираются три случайных числа a, b, c. С какой вероятностью из отрезков с длинами a, b, c можно составить треугольник?

4. Ваня закрасил 67% окружности рыжим цветом. Докажите, что в окружность можно вписать выпуклый девятиугольник так, чтобы все его вершины оказались рыжими и все его углы были кратны 15°.

5. На окружности независимо выбираются **(а)** 3; **(б)** n случайных точек. С какой вероятностью их выпуклая оболочка содержит центр окружности?

6. На плоскости даны 10 точек. Докажите, что их можно покрыть несколькими непересекающимися кругами радиуса 1. *Hint: как покрыть как можно бо́льшую долю точек плоскости непересекающимися кругами радиуса 1?*

7. На сфере радиуса 1 нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная длиной меньше 2π (звенья ломаной — дуги экваторов). Докажите, что существует полусфера, полностью содержащая ломаную.

8. Выпуклый многоугольник таков, что его проекция на любую прямую — это отрезок длины не больше 1. Докажите, что периметр многоугольника не больше π.

Геометрическая вероятность, добавка

1. В пространстве нарисовано n прямых. Докажите, что можно выбрать из них не менее $\frac{7}{24}n$, попарно не перпендикулярных друг другу.

2. На плоскости несколько кругов радиуса 1 в объединении образуют фигуру площади S. Докажите, что можно выбрать несколько кругов так, чтобы выбранные круги не пересекались попарно и покрывали площадь не менее $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}S$.

Линейная алгебра в комбинаторике

Пример 1. Есть таблица 8×8, изначально заполненная нулями. Разрешается выбрать любой квадрат 3×3 или 4×4 и прибавить ко всем его клеткам одинаковое действительное число. Все ли расстановки чисел можно получить?

Пример 2. Изначально все клетки доски 8×8 покрашены в белый цвет. За одну операцию разрешается целиком перекрашивать строку или столбец. Сколько различных раскрасок можно получить такими операциями?

Пример 3. Есть несколько лампочек и несколько кнопок. Каждая кнопка подсоединена к некоторому набору лампочек и при нажатии на неё состояние лампочек из этого набора меняется на противоположное. Подмножество лампочек назовём *инвариантным*, если каждая кнопка меняет состояния чётного числа лампочек этого подмножества. Докажите, что из одного состояния лампочек можно получить другое тогда и только тогда, когда у обоих состояний чётность числа включенных лампочек во всех инвариантных подмножествах совпадает.

1. В классе $n+1$ девочка и n мальчиков. Докажите, что можно выбрать непустое подмножество множества девочек так, чтобы каждый мальчик дружил с чётным количеством девочек из этого подмножества.

2. На кружке по математике n школьников решали $n+1$ задачу. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один школьник. Докажите, что можно назвать некоторые задачи интересными, а некоторые — скучными, и каждой задаче присвоить некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый школьник набрал за интересные задачи суммарно столько же баллов сколько за скучные. (Некоторые задачи могут быть не интересными и не скучными.)

3. Изначально все клетки доски 8×8 белые. За одну операцию разрешается перекрасить все клетки в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций все клетки можно перекрасить в чёрный цвет?

4. В клетчатом квадрате $n \times n$ (где $n > 1$) по линиям сетки (внутри квадрата или на его границе) проведены несколько контуров, каждый из которых ограничивает некоторый прямоугольник. Может ли оказаться, что через любую сторону любой клетки будет проходить нечётное число таких контуров?

5. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось хотя бы $(n+m-1)$ чисел.

6. В КИМах ЕГО (Единой Гос. Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может приписать положительные веса тестовым вопросам так, чтобы участники по первичным баллам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.

Линал в комбе, добавка

1. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.

2. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2026-элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было чётное число элементов, причём в пересечении любых двух подмножеств тоже было чётное число элементов?

3. Имеется доска 13×13, каждая клетка которой покрашена в чёрный или белый цвет. За один ход можно перекрасить (то есть белые заменить на чёрные, а чёрные — на белые) все клетки одного квадрата 2×2 или 9×9. Сколько различных раскрасок можно получить из начальной?