Графические последовательности

Все графы в этом листочке предполагаются простыми, то есть неориентированными, без петель и кратных рёбер.

Список степеней вершин простого графа, упорядоченный по невозрастанию, будем называть его *степенной последовательностью*. Последовательность неотрицательных целых чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$, удовлетворяющая условию $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$, называется *графической*, если существует граф на n вершинах, степенная последовательность которого совпадает с данной.

1. **(а)** Приведите пример двух неизоморфных графов с одинаковыми степенными последовательностями.
(б) Докажите, что существуют ровно 5 неизоморфных графов со степенной последовательностью $2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$.

2. Приведите пример последовательности $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ с чётной суммой $d_1+d_2+\ldots+d_n$ и удовлетворяющей условию $d_1 \leqslant n-1$, которая не является графической.

Пусть в графе есть вершины i, j, k, l такие, что пары (i, j) и (k, l) соединены ребром, а пары (i, k) и (j, l) не соединены ребром. Тогда *переключением* назовём операцию, при которой мы убираем рёбра в парах (i, j) и (k, l) и соединяем рёбрами (i, k) и (j, l).

Теорема. Любые два графа с одинаковыми степенными последовательностями приводятся один к другому с помощью последовательности переключений.

3. Пусть вершины графа занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$ так, что $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$. Докажите, что для каждой вершины i существует последовательность переключений, в результате которой вершина i оказывается соединена с d_i вершинами наибольшей степени.

4. Докажите теорему.

Пусть дана последовательность $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ упорядоченных по неубыванию целых неотрицательных чисел. Через d^i обозначим последовательность, полученную из d удалением d_i и уменьшением первых d_i оставшихся членов на 1 (и переупорядочиванием по неубыванию при необходимости).

5. **(Теорема Гавела–Хакими)** Докажите, что
(а) если для некоторого i последовательность d^i графическая, то и последовательность d графическая;
(б) если d графическая, то и d^i графическая при любом i (в частности, d^i не содержит отрицательных членов).

Теорема Эрдёша–Галлаи. Последовательность целых неотрицательных чисел $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ является графической, если и только если выполнены следующие два условия:

- сумма $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ чётна;
- для каждого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i).$$

6. **(а)** Докажите необходимость условий теоремы Эрдёша-Галлаи.
(б) Докажите их достаточность.

7. Каждый из 2026 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причём дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались попарно различными целыми числами от 0 до 2025. Известно, что все рыцари отвечали на вопрос верно, а все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей?