

Отбор на летние сборы

1. В некоторых клетках шахматной доски лежат фишки (в каждой клетке не более одной фишки). В каждой клетке, не содержащей фишки, написано число, равное количеству фишек в соседних клетках (клетки считаются соседними, если они имеют хотя бы одну общую вершину). Сколько существует расстановок фишек, для которых сумма всех написанных чисел нечётна?
2. Точка M — середина основания BC трапеции $ABCD$. На основании AD выбрана произвольная точка X . Лучи XM и DC пересекаются в точке Y . Прямая, проходящая через X перпендикулярно AD , пересекает отрезок BY в точке Z . Докажите, что $\angle YBC = \angle ZDA$.
3. Найдите все пары целых чисел (x, z) , удовлетворяющие равенству

$$x(x^3 - z + 1) = z^2(z - 1)^2.$$

4. Через фиксированную точку C гиперболы $y = \frac{1}{x}$ проводятся всевозможные окружности, пересекающие гиперболу в трёх других точках, сумма абсцисс которых равна нулю. Докажите, что все такие окружности, помимо точки C , имеют ещё одну общую точку.
5. За круглым обеденным столом сидят N девушек и N парней, где $N \geq 4$. Две девушки будут болтать друг с другом, если между ними сидит не более 1 человека, или если между ними сидят ровно два человека, хотя бы один из которых мужчина. Докажите, что независимо от рассадки как минимум N пар девушек будут болтать друг с другом.