Отбор на летние сборы. Решения

1. В некоторых клетках шахматной доски лежат фишки (в каждой клетке не более одной фишки). В каждой клетке, не содержащей фишки, написано число, равное количеству фишек в соседних клетках (клетки считаются соседними, если они имеют хотя бы одну общую вершину). Сколько существует расстановок фишек, для которых сумма всех написанных чисел нечётна?

Ответ: 2^{63}.

Решение. Обозначим сумму всех записанных чисел через S. Допишем в каждую клетку с фишкой число, равное количеству фишек в соседних клетках и просуммируем все числа в клетках. Полученную сумму обозначим через S'. Заметим, что $S' - S$ равно удвоенному количеству пар соседних клеток с фишками. Значит, чётность чисел S' и S совпадает. Несложно видеть, что S' равно суммарному количеству соседей клеток с фишками. Клетки на границе (их 28) имеют нечётное число соседей, а все остальные (их 36) — чётное. Значит число расстановок фишек, для которых сумма S нечётна, равно числу расстановок фишек, среди которых нечётное число фишек стоит на границе. Количество способов расставить нечётное число фишек на границе равно 2^{27}. Количество способов как-то расставить фишки в центральные клетки равно 2^{36}. Получаем, что количество расстановок, для которых число S нечётно равно $2^{36} \cdot 2^{27} = 2^{63}$.

2. Точка M — середина основания BC трапеции $ABCD$. На основании AD выбрана произвольная точка X. Лучи XM и DC пересекаются в точке Y. Прямая, проходящая через X перпендикулярно AD, пересекает отрезок BY в точке Z. Докажите, что $\angle YBC = \angle ZDA$.

Решение. Пусть T — точка пересечения луча YB с прямой AD. Поскольку прямые AD и BC параллельны треугольники YBC и YTD гомотетичны с центром в Y. Тогда точка X является серединой отрезка TD. Треугольник TZD равнобедренный, так как ZX является высотой и медианой в этом треугольнике. Следовательно, $\angle ZTD = \angle ZDT$. Но $\angle ZDT = \angle ZDA$, а $\angle ZTD = \angle YBC$ как соответственные при параллельных прямых AD и BC. Получаем, что $\angle YBC = \angle ZDA$.

3. Найдите все пары целых чисел (x, z), удовлетворяющие равенству

$$x(x^3 - z + 1) = z^2(z - 1)^2.$$

Ответ: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$.

Решение. Заметим, что если $x = 0$, то $z = 0$ или $z = 1$. Если $z = 0$, то $x^4 + x = 0$, то есть $x = 0$ или $x = -1$. Пусть теперь $x, z \neq 0$. Тогда

$x^2 + z(z-1) > 0$, и поэтому исходное уравнение переписывается в виде

$$x^2 - z(z-1) = \frac{x(z-1)}{x^2 + z(z-1)}.$$

Так как $|x(z-1)| \leqslant (x^2 + (z-1)^2)/2$, то

$$|x^2 - z(z-1)| = \left|\frac{x(z-1)}{x^2 + z(z-1)}\right| \leqslant \frac{x^2 + (z-1)^2}{2(x^2 + z(z-1))} < 1.$$

Последнее неравенство верно, так как оно равносильно условию $x^2+z^2 > 1$, которое выполняется при ненулевых x, z. Таким образом, $x^2 - z(z-1) = 0$. Тогда $x(z-1) = 0$. Случай $x = 0$ уже разобран. Если $z = 1$, то $x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$. Так

4. Через фиксированную точку C гиперболы $y = \frac{1}{x}$ проводятся всевозможные окружности, пересекающие гиперболу в трёх других точках, сумма абсцисс которых равна нулю. Докажите, что все такие окружности, помимо точки C, имеют ещё одну общую точку.

Решение. Пусть окружность, удовлетворяющая условию задачи задаётся уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Рассмотрим пересечение этой окружности с гиперболой $y = 1/x$. Абсциссы точек пересечения удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 + \left(\frac{1}{x} - y_0\right)^2 = R^2.$$

Раскроем скобки и домножим на x^2 (точка пересечения не может иметь абсциссу 0). Получим уравнение четвёртой степени:

$$x^4 - 2x_0 \cdot x^3 + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) \cdot x^2 + 2y_0 \cdot x + 1 = 0.$$

По условию мы знаем, что это уравнение имеет четыре различных решения x_C, x_1, x_2, x_3, где x_C - абсцисса точки C и $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_C = 2x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_C}{2}.$$

Подставляя точку $C = (x_c, \frac{1}{x_C})$ в уравнение окружности получаем второе условие на x_0, y_0, R:

$$(x_C - x_0)^2 + \left(\frac{1}{x_C} - y_0\right)^2 = R^2.$$

Подставляя $x_0 = \frac{x_C}{2}$, получаем

$$\frac{x_C^2}{4} + \left(\frac{1}{x_C} - y_0\right)^2 = R^2.$$

Подставляя полученные выражения для R^2 и x_0 в уравнение окружности, получаем

$$\left(x - \frac{x_C}{2}\right)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{x_C^2}{4} + \left(\frac{1}{x_C} - y_0\right)^2.$$

Видно, что точка $(0, \frac{1}{x_C})$ лежит на этой окружности, а значит все окружности, удовлетворяющие условию задачи, проходят через точку $(0, \frac{1}{x_C})$.

5. За круглым обеденным столом сидят N девушек и N парней, где $N \geqslant 4$. Две девушки будут болтать друг с другом, если между ними сидит не более 1 человека, или если между ними сидят ровно два человека, хотя бы один из которых мужчина. Докажите, что независимо от рассадки как минимум N пар девушек будут болтать друг с другом.

Решение. Назовём *блоком* максимальную (по включению) группу сидящих подряд людей одного пола. Пусть имеется ровно k блоков парней и k блоков девушек. Обозначим через G_i и M_i количества блоков девушек и парней длины i соответственно. Кроме того, пусть X — число парней, окружённых двумя блоками девушек, каждый из которых имеет длину ровно 1.

Утверждается, что число пар болтающих девушек не меньше

$$2N - 3k + G_1 + 2M_1 + M_2 - X.$$

Число пар болтающих девушек в блоке длины l не меньше чем $\max(2\ell - 3, 0)$. Суммируя по всем блокам девушек, получаем, что количество пар болтающих девушек между которыми нет парней не меньше $2N - 3k + G_1$. Число пар девушек, между которыми сидят ровно два парня, равно M_2. Кроме того, число пар девушек, между которыми сидит ровно один парень, не меньше $2M_1 - X$, поскольку любой парень, окружённый двумя блоками девушек, даёт не менее двух пар болтающих девушек, если только оба этих блока не имеют длину 1. Тем самым утверждение доказано.

Теперь заметим, что

$$2M_1 + M_2 + N \geqslant 3k,$$

поскольку каждый блок парней даёт вклад не менее 3 в левую часть. Кроме того, сопоставляя каждый блок, учтённый в X, со следующим за ним по часовой стрелке блоком девушек длины 1, получаем $G_1 \geqslant X$. Комбинируя эти неравенства, получаем

$$2N - 3k + G_1 + 2M_1 + M_2 - X = N + (2M_1 + M_2 + N - 3k) + (G_1 - X) \geqslant N,$$

что завершает доказательство.