Функциональное уравнение Коши

Определение. *Функциональным уравнением Коши* называется уравнение

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}; \quad f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{A}.$$

Утверждение. Существует континуальный набор вещественных чисел $\{r_\alpha\}$, такой что $\forall x \in \mathbb{R}$ можно единственным образом представить в виде конечной линейной комбинации $x = k_{\alpha_1} r_{\alpha_1} + k_{\alpha_1} r_{\alpha_1} + \ldots + k_{\alpha_n} r_{\alpha_n}$, где $k_{\alpha_i} \in \mathbb{Q}$. Этот набор носит название *базис Гамеля.*

1. **(а)** Решите уравнение Коши для $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{N}$.
(б) Решите уравнение Коши для $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{Q}$.
(в) Докажите, что уравнение Коши для $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{R}$ имеет решения, отличные от $f(x) = kx$.
(г) Пусть $f(x)$ решение уравнение Коши для $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{R}$, отличное от $f(x) = kx$. Докажите, что график $y = f(x)$ всюду плотен на координатной плоскости, то есть в любом круге ненулевого радиуса найдется точка принадлежащая графику. (*Подсказка*: для начала докажите, что $f(x)$ всюду плотна $\Rightarrow f(x) + cx$ всюду плотна.)

Замечание. На практике пункт 1 г) означает, что любая разумная функция (например, непрерывная, монотонная или ограниченная на некотором интервале) решающая уравнение Коши с $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{R}$ обязана иметь вид $f(x) = kx$.

2. Найдите все непрерывные функции $f(x)$, такие что
(а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x+y+6) = f(x) + f(y) + 7,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
(б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x+y) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
(в) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; \quad f(xy) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+$
(г) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; \quad f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+$

3. Найдите все монотонные функции $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такие что

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$

4. (*Уравнение Пексидера*) Найдите все тройки непрерывных функций $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие что $f(x+y) = g(x) + h(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5. Найдите все непрерывные функции $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такие что

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy).$$

6. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие что

$$f(x^2 - y^2) = xf(y) - yf(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

7. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие что

$$f\left(x^{101} + f(y)^{101}\right) = f(x)^{101} + y^{101},\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$