

## Подпор касательной, часть 2

1. Для любых положительных чисел  $a, b, c$  докажите, что

$$\frac{a^5}{a^3 + b^3} + \frac{b^5}{b^3 + c^3} + \frac{c^5}{c^3 + a^3} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

2. Для любых положительных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

3. Докажите, что для любых трёх положительных чисел  $x, y, z$  выполнено неравенство

$$(x - y)\sqrt{3x^2 + y^2} + (y - z)\sqrt{3y^2 + z^2} + (z - x)\sqrt{3z^2 + x^2} \geq 0.$$

4. Положительные числа  $a, b, c, d$  удовлетворяют соотношению  $abcd = 1$ . Докажите неравенство

$$\frac{1}{1 + bc + cd + db} + \frac{1}{1 + cd + da + ac} + \frac{1}{1 + da + ab + bd} + \frac{1}{1 + ab + bc + ca} \leq 1.$$

5. Даны положительные числа  $a, b, c, d$ , удовлетворяющие соотношению

$$\frac{1}{a^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + 1} + \frac{1}{d^3 + 1} = 2.$$

Докажите неравенство

$$\frac{1 - a}{1 - a + a^2} + \frac{1 - b}{1 - b + b^2} + \frac{1 - c}{1 - c + c^2} + \frac{1 - d}{1 - d + d^2} \geq 0.$$

6. Даны числа  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ , причём  $x_0 = x_n$ . Докажите неравенство

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_{k-1}x_k + x_k^2) \geq 1.$$