Городские кружки ЦПМ
Весенние сборы, апрель 2026, 10 класс
Материалы занятий

Содержание

Часть I

Материалы группы 10–1

1 Алгебра

Классическая ТЧ

1. Найдите все натуральные (m, n) такие, что

$$11^n + 2^n + 6 = m^3$$

2. Для натурального числа $n \geqslant 2$ все его делители выписали в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Оказалось, что разности $d_2 - d_1$, $d_3 - d_2$, $\ldots$, $d_k - d_{k-1}$ — это числа $1, 3, \ldots, 2k-3$, расставленные в некотором порядке. Чему может быть равно n?

3. Существуют ли натуральные числа a, b, c, большие 10^{10} и такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2025?

4. Найдите все наборы натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ такие, что

$$x_{i+2}^2 = \text{НОК}(x_{i+1}, x_i) + \text{НОК}(x_i, x_{i-1})$$

при $i = 1, 2, \ldots, 20$, где $x_0 = x_{20}$, $x_{21} = x_1$, $x_{22} = x_2$.

5. Найдите все натуральные числа (m, n), такие что

$$(m^n - n)^m = n! + m.$$

6. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

7. Пусть a, b, c, d — четыре натуральных числа такие, что $a > b > c > d$. Известно, что

$$ab + bc + ca + d^2 \mid (a + b)(b + c)(c + a).$$

Найдите наименьшее возможное значение $\Omega(ab+bc+ca+d^2)$. Здесь $\Omega(n)$ обозначает количество простых делителей числа n (с учётом кратности). Например, $\Omega(12) = 3$.

8. Пусть a, b, c, d, e — различные натуральные числа такие, что

$$a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5.$$

Докажите, что число $ac + bd$ является составным.

Неклассическая ТЧ

1. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 100$. Игроки A и B играют в следующую игру: они по очереди выбирают число с доски и стирают его. Начинает игрок A. Если после хода игрока (после того, как он стёр число с доски) сумма стёртых чисел не может быть выражена как разность двух точных квадратов, то этот игрок проигрывает. В противном случае игра продолжается. У какого игрока существует выигрышная стратегия?

2. На доске записаны n положительных целых чисел. Разрешается добавлять на доску положительные целые числа вида $c = \frac{a+b}{a-b}$, где a и b — числа, уже записанные на доске. Найдите минимальное значение n, при котором, добавляя числа описанным способом, можно получить любое положительное целое число на доске. Для такого n определите, какие числа были записаны на доске в начале.

3. Для натурального $a_0 > 1$, последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задана рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{если } \sqrt{a_n} \text{ целое,} \\ a_n + 3 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определите значения a_0, при которых существует такое A, что $a_n = A$ для бесконечного числа индексов n.

4. На доске написано положительное трёхзначное число. Каждую секунду число n на доске заменяется на $n + \frac{n}{p}$, где p — наибольший простой делитель n. Докажите, что либо через 999 секунд, либо через 1000 секунд число на доске станет степенью двойки.

5. Пусть $n \geqslant 2$ — целое число, и пусть A_n — множество

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant k < n\}.$$

Найти наибольшее положительное целое число, которое нельзя представить в виде суммы одного или нескольких (не обязательно различных) элементов множества A_n.

6. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа x, y, z на доске стираются, а вместо них выписываются числа

$$x + \frac{1}{yz}, \quad y + \frac{1}{zx}, \quad z + \frac{1}{xy}.$$

Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел.

7. Пусть дано положительное целое число c. Рассмотрим все последовательности положительных целых чисел (a_n) такие, что для каждого положительного целого n,

$$a_{n+2} = \text{НОД}(a_{n+1}, a_n) + c.$$

Найдите все положительные целые числа a, для которых существует последовательность указанного типа, в которой число a встречается бесконечно много раз.

8. Изначально на доске написано число 2026. Если существуют натуральные числа a, b, k такие, что число $a^k + b^k$ написано на доске, то на доску можно дописать число $a^{k'} + b^{k'}$ для любого натурального k'. Найдите все положительные числа, которые могут оказаться на доске.

Многомногочленов

1. Числа от 1 до $2n+1$ расположены по кругу в порядке возрастания. Для любых трех последовательных чисел i, j, k рассматривается многочлен $(x-i)(x-j)(x-k)$. Обозначим за $S(x)$ сумму всех таких многочлены. Докажите, что у него есть целый корень.

2. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трёхчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго.

3. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами. Бесконечная последовательность различных натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2$, и т.д. Какую степень может иметь $P(x)$?

4. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(P(n)+n)$ является простым числом для бесконечного набора целых чисел n.

5. Найдите наибольшее натуральное n, такое что существуют n многочленов с вещественными коэффициентами, сумма любых двух которых не имеет корня, а сумма любых трех — имеет.

6. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Обозначим за n максимальный коэффициент многочлена $P(x)$. Известно, что нашлись такие натуральные k и l, что $k < l$, $n < l$, и выполняются равенства $P(k) = Q(k)$, $P(l) = Q(l)$. Докажите, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равны.

7. Существуют ли такие многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, что $P^3(x) - Q^2(x)$ является линейным, но не константой.

8. Изначально на доске были написаны $n+1$ одночленов $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены

$$S_1 = 1 + x, \quad S_2 = 1 + x + x^2, \quad \ldots, \quad S_n = 1 + x + \ldots + x^n.$$

Докажите, что $m \geqslant \frac{2n}{k+1}$.

Алгебраический разнобой

1. Даниил хочет придумать два вещественных числа S и P, а после этого расставить по окружности шесть попарно различных вещественных чисел так, чтобы для любых трех подряд идущих по окружности чисел было выполнено хотя бы одно из двух условий:

1) сумма этих трех чисел равна S;
2) произведение этих трех чисел равно P.

Выясните, осуществимо ли желание Даниила.

2. Действительные числа a, b, c таковы, что $a > b > c$ и выполнено равенство

$$\frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{c-a} + \frac{c-a}{a-b} = -3.$$

Докажите, что $(b-c)^3 > 4(a-b)^3$.

3. Пусть дано произвольное положительное число a. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_1 = \frac{a}{a+1},\ a_{n+1} = \frac{aa_n}{a^2 + a_n - aa_n} \quad \forall n \geqslant 1.$$

Найдите наименьшую константу C такую, что неравенство

$$a_1 + a_1 a_2 + \ldots + a_1 \ldots a_m < C$$

выполняется для всех натуральных m независимо от a.

4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.

5. Пусть S — 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10 000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых принадлежит множеству S. К каждой из 1 000 000 отмеченных точек (x, y, z) прикрепим шарик с написанным на нём числом

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}.$$

На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?

6. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 49, 50$. Аня выполняет следующую операцию: она выбирает три произвольных числа a, b, c с доски, заменяет их их суммой $a+b+c$ и записывает в тетрадь произведение $(a+b)(b+c)(c+a)$. Аня повторяет

такие операции до тех пор, пока на доске не останется всего два числа (всего 24 операции). Затем она вычисляет сумму всех 24 чисел, записанных в тетради. Пусть A и B — максимальная и минимальная возможные суммы, которые может получить Аня. Найдите значение $A - B$.

7. Изначально на доске написано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдется натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное число раз.

8. Дано целое число $n \geqslant 2$ и положительные действительные числа a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_n, b_n такие, что

$$\frac{a_k^2+1}{b_k} \geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_n \quad \text{и} \quad \frac{b_k^2+1}{a_k} \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| \leqslant \sqrt{8n}.$$

2 Геометрия

Вступительный разнобой

1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T, покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T.

2. На продолжении стороны BC остроугольного треугольника ABC за точку C выбрана точка X, на продолжении стороны CA за точку A – точка Y, а на продолжении стороны AB за точку B – точка Z так, что треугольники ABC и XYZ подобны (именно с таким соответствием точек). Докажите, что ортоцентр треугольника XYZ не зависит от выбора точек X, Y, Z.

3. В треугольнике ABC проведена высота AH, медиана CM пересекает его описанную окружность в точке X. Точка D такова, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом. Докажите, что точки C, D, H, X лежат на одной окружности.

4. На высотах, проведённых из вершин A, B, C остроугольного треугольника ABC, выбраны точки D, E, F соответственно так, что углы BDC, AEC, AFB прямые. Докажите, что существует окружность, которая касается прямых AE, AF, BD, BF, CD, CE.

5. Окружность ω лежит внутри окружности Ω и касается её внутренним образом в точке T. Пусть XY – переменная хорда окружности Ω, касающаяся ω. Обозначим X' и Y' середины дуг TY и TX, не содержащих точек X и Y соответственно. Докажите, что всевозможные прямые $X'Y'$ проходят через фиксированную точку.

6. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ на биссектрисах углов при вершинах B и C отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC \parallel AB$, $QB \parallel AC$. Прямая PQ пересекает окружность (ABC) в точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY — равнобедренный.

7. Окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 вложены друг в друга (ω_2 внутри ω_1, ω_3 внутри ω_2, ω_4 внутри ω_3), их пересекают попарно непараллельные прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Для $i = 1, 2, 3$ обозначим точки пересечения ℓ_i с окружностями через A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i. Оказалось, что $A_iB_i + E_iF_i = C_iD_i + G_iH_i$ для $i = 1, 2$. Докажите, что это равенство верно и для $i = 3$.

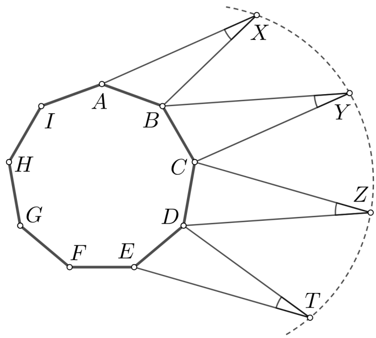
Следующий разнобой

1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F, причём E лежит между B и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямые AE и DF касаются окружности (AOD). Докажите, что они касаются и окружности (EOF).

2. Пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC = CD = DE$, вписан в окружность с центром O. На продолжениях сторон AB и AE за точки B и E выбраны точки X и Y соответственно так, что $AD = BX$ и $AC = EY$. Докажите, что $OX = OY$.

3. Точки M и N — середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Известно, что точки M, N, C, D лежат на одной окружности, а прямые AM и BN касаются этой окружности. Докажите, что четырёхугольник $CMND$ — трапеция.

4. На сторонах правильного девятиугольника $ABCDEFGHI$ во внешнюю сторону построили треугольники XAB, YBC, ZCD и TDE. Известно, что углы X, Y, Z, T этих треугольников равны 20° каждый, а среди углов XAB, YBC, ZCD и TDE каждый следующий на 20° больше предыдущего. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.



5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр, опущенный из точки B_1 на BC, пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр опущенный из точки B на AK пересекает AC в точке L. Докажите что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

6. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке K и продолжений сторон AB и CD, окружность ω_2 касается стороны AD в точке L и продолжений сторон AB и CD. Известно, что точки O, K, L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и центр окружности ω лежат на одной прямой.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$ и $BM = AC$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке O. Оказалось, что $\angle BAC = 2\angle BOM$. Найдите $\angle BAC$.

Добавка

1. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Точка B', симметричная точке B относительно прямой OI, лежит внутри угла ABI. Докажите, что касательные к окружности $(BB'I)$, проведенные в точках B' и I, пересекаются на прямой AC.

2. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC', проведенный через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведенный через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ, касается окружности Ω.

3. В окружность ω вписан пятиугольник $ABCDE$. Прямая CD пересекает лучи AB и AE в точках X и Y соответственно. Отрезки EX и BY пересекаются в точке P и вторично пересекают окружность ω в точках Q и R. Точка A_0 симметрична точке A относительно прямой CD. Окружность γ, описанная около треугольника PQR, пересекает окружность, описанную около треугольника A_0XY, в двух точках. Докажите, что их можно назвать M и N так, чтобы прямые CM и DN пересекались на окружности γ.

Пугающий разнобой

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что

$$\angle ABD + \angle ACD > \angle BAC + \angle BDC.$$

Докажите, что $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$.

2. Докажите, что расстояние между серединой стороны AC треугольника ABC и серединой дуги BAC его описанной окружности не меньше $AB/2$.

3. В остроугольном треугольнике ABC провели медиану AM, высоту AH и биссектрису AL. Оказалось, что точки B, H, L, M, C лежат на прямой BC именно в таком порядке, причём $LH < LM$. Докажите, что $BC > 2AL$.

4. Точка M внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABM = \angle ACM$, точка N симметрична M относительно середины стороны BC. Докажите, что

$$BM \cdot CM + AM \cdot AN \geqslant 2S_{ABC}.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC углы B и C больше 60°. Точки P и Q на сторонах AB и AC таковы, что A, P, Q и ортоцентр H треугольника ABC лежат на одной окружности; K — середина отрезка PQ. Докажите, что $\angle BKC > 90^\circ$.

6. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.

7. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром O_B проходит через точки A, C_1 и середину отрезка BH. Окружность с центром O_C проходит через точки A, B_1 и середину отрезка CH. Докажите, что $O_BB_1 + O_CC_1 > BC/4$.

8. Точка X лежит строго внутри описанной около треугольника ABC окружности. Обозначим через I_B и I_C центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $XI_B \cdot XI_C > XB \cdot XC$.

Пугающий разнобой. Добавка

1. В остроугольном треугольнике ABC биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке I. Точка H — ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что

$$AH + BH + CH \geqslant AI + BI + CI.$$

2. В остроугольном треугольнике ABC стороны попарно различны. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей соответственно, H — ортоцентр. Докажите, что $\angle OIH > 135^\circ$.

3. Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны r и R соответственно. Внутри треугольника выбрана точка P. Прямые BP и CP пересекают окружность (ABC) в точках B' и C' соответственно. Докажите, что

$$\frac{B'C'}{AP} \leqslant \frac{R}{r}.$$

Закрепляющий разнобой

1. Внутри треугольника ABC выбрана точка P. Точки P_a, P_b, P_c — проекции точки P на высоты из вершин A, B, C соответственно. Оказалось, что $AP_a = BP_b = CP_c = d$. Докажите, что d — диаметр вписанной окружности треугольника ABC.

2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей (APD) и (BQD), параллельна прямой AD.

3. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность ω. Точка E лежит на продолжении стороны AB за точку B, а точка F — на продолжении стороны AD за точку D, причём отрезок EF проходит через вершину C. Отрезок DE вторично пересекает окружность ω в точке X. Докажите, что $AF = FX$.

4. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = CE$. На дуге DE описанной окружности треугольника ADE, не содержащей точку A, нашлись такие точки P и Q, что $AB = PC$ и $AC = BQ$. Докажите, что $AP = AQ$.

5. Фиксированы окружность ω, точка A на ней и точка P вне окружности. Переменная секущая, проходящая через P, пересекает окружность в точках B и C. Докажите, что ортоцентры треугольников ABC лежат на одной окружности.

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в двух точках X_1 и Y_1. Окружности с диаметрами BC и AD пересекаются в двух точках X_2 и Y_2. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в двух точках X_3 и Y_3. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 пересекаются в одной точке.

7. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. На стороне BC выбрана точка D. Биссектриса угла BAD пересекает отрезок A_1C_1 в точке E. Точка J — центр вписанной окружности треугольника ACD. Докажите, что $\angle AEJ = 90^\circ$.

8. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Отложим на лучах BA и CA отрезки BA_b и CA_c соответственно, равные по длине BC. Пусть O_a — центр окружности (AA_bA_c). Аналогично определим точки O_b и O_c. Докажите, что точка O является ортоцентром треугольника $O_aO_bO_c$.

Добавочный разнобой

1. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M. Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2.

2. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены такие точки P и Q, что

$$\angle PDC + \angle PCB = \angle PAB + \angle PBC = \angle QCD + \angle QDA = \angle QBA + \angle QAD = 90^\circ.$$

Докажите, что прямая PQ образует равные углы с прямыми AD и BC.

3 Комбинаторика

Клетки

1. Клетки доски $(2m+1)\times(2n+1)$ красятся в два цвета — белый и черный. Единичная клетка строки (столбца) называется *доминирующей по строке* (по столбцу), если более половины клеток этой строки (этого столбца) имеет одинаковый цвет с этой клеткой. Докажите, что по крайней мере $m+n+1$ клеток доски одновременно доминируют по строке и по столбцу.

2. Существует ли натуральное число n, для которого можно покрасить все клетки доски $n\times n$ в три цвета так, чтобы все цвета встречались, не было двух одноцветных соседних клеток и все клетки любых двух цветов составляли связное множество клеток?

3. Для какого наибольшего k можно раскрасить клетки таблицы $2026\times k$ в 1013 цветов так, чтобы не нашлось двух строк и двух столбцов, на пересечении которых все 4 клетки одного цвета?

4. Каждая клетка квадратной таблицы 11×11 окрашена в один из k цветов. Оказалось, что если какие-то две одноцветные клетки лежат в одном столбце, то справа от верхней из них больше нет клеток этого цвета. При каком наименьшем k это может быть?

5. Каждая клетка таблицы 30×30 содержит одно из чисел: -1, 0 или 1, причём каждое из этих трёх чисел встречается ровно 300 раз. Возможно ли, чтобы все 60 сумм по строкам и столбцам были различны?

6. Петя записал на доске 100 различных целых чисел. Вася должен поставить в каждую клетку таблицы 100×100 по целому числу так, чтобы в каждом клетчатом прямоугольнике 1×3 (как горизонтальном, так и вертикальном) сумма чисел была равна одному из чисел, выписанных на доске. При каком наибольшем целом n Вася гарантированно (т. е. какие бы числа Петя ни написал) сможет заполнить таблицу так, чтобы в ней встретились хотя бы по разу числа $1, 2, \ldots, n$ (и, возможно, какие-то другие целые числа)?

7. Можно ли в клетки таблицы 9×9 записать натуральные числа от 1 до 81 так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 3×3 была одна и та же?

8. Дано целое число $n\geqslant 4$. Какое максимальное количество клеток на доске размера $n\times n$ можно покрасить в черный цвет так, что для любых двух черных клеток (a,b) и (c,d) выполнено

$$|a-c|+|b-d|\neq n-1?$$

Игры

1. Паша и Гриша играют в игру. Они по очереди красят непокрашенные стороны 2025-угольника таким образом, чтобы никакие две соседние стороны не были покрашены в один цвет. Проигрывает тот, кто последним ввёл в игру новый цвет. Начинает Паша. Кто выиграет при правильной игре?

2. Алиса и Базилио играют в следующую игру; из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

3. Изначально на столе лежат три кучки из 100, 101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучи, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (на своем первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

4. Клетчатый квадрат 100×100 разрезан на доминошки (прямоугольники 1×2). Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседних по стороне клетки, между которыми был проведен разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т. е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

5. Али-Баба и разбойник делят 100 золотых монет, разложенных в 10 кучек по 10 монет. Али-Баба выбирает 4 кучки, ставит около каждой из них по кружке, откладывает в каждую кружку по несколько монет (не менее одной, но не всю кучку). Разбойник должен как-то расставить кружки напротив этих же четырёх кучек, изменив их расположение, после чего монеты высыпаются из кружек в те кучки, около которых оказались кружки. Далее Али-Баба снова выбирает 4 кучки из 10, и т. д. В любой момент Али-Баба может уйти, унеся с собой любые три кучки по выбору. Остальные монеты достаются разбойнику. Какое наибольшее число монет сможет унести Али-Баба, если разбойник тоже старается получить побольше монет?

6. В ряд выписаны числа $1, 2, \ldots, 100$. Петя и Вася играют в игру. В каждый ход Петя ход указывает на несколько подряд идущих в ряду чисел, после чего Вася одновременно увеличивает все указанные числа на 1 либо уменьшает их все на 1. Какого наибольшего количества кратных 4 чисел может добиться Петя такими ходами вне зависимости от игры Васи?

Процессы

1. Рассмотрим отрезок $[0;1]$. На каждом шагу мы можем разбить один из имеющихся отрезков на два новых и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что сумма чисел на доске никогда не превысит $1/2$.

2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. На доске в порядке $1, 2, 3, \ldots, n$ выписаны числа. Разрешается выполнять следующие операции:

1. Если три соседних числа x, y, z удовлетворяют условию $x + y + z \equiv 0 \pmod 3$, то их можно заменить на y, z, x.
2. Если два соседних числа x, y удовлетворяют условию $x \equiv y \pmod 3$, то их можно заменить на y, x.

Найдите все n, для которых с помощью таких операций исходную последовательность можно преобразовать в $n, 1, 2, \ldots, n-1$.

3. По кругу стоит $3n$ человек — это n семей «мама–папа–ребенок». Любые два человека, стоящие рядом, могут поменяться местами, кроме случая, когда ребёнок меняется местом с одним из своих родителей (это не разрешено). При каких n с помощью таких обменов людей можно расставить по кругу в любом порядке? (Перестановки, отличающиеся циклическим сдвигом, считаются различными.)

4. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены остатки по модулю m. Каждую минуту происходит обновление таблицы: к числу в каждой клетке прибавляется сумма чисел в соседних с ней клетках по стороне или вершине (все эти операции происходят одновременно). После каждого такого обновления мы можем выбрать клетку и прибавить к числу в ней 1 (по модулю m), либо же не делать ничего. Докажите, что можно через некоторое время сделать все остатки нулями.

5. В марсианском метро 2026 станций, некоторые из них объединены в ветки. По веткам можно из любой станции доехать до любой другой. На каждой станции стоит несколько полицейских. Глава службы охраны за один день может выбрать любую ветку, а также станцию из неё, снять с неё всех полицейских и почти поровну распределить между всеми станциями этой ветки (при этом он сам решает, куда направится больше полицейских, куда меньше). Докажите, что такими операциями можно как угодно перераспределить полицейских по станциям. (Все полицейские считаются одинаковыми, т.е. нас интересует только их количество на станции).

Графы

1. Дан граф, в котором любые две вершины можно соединить маршрутом из не более 100 рёбер. Выяснилось, что любые две вершины можно соединить маршрутом из чётного числа рёбер. Для какого наименьшего натурального k можно с гарантией утверждать, что любые две вершины можно соединить маршрутом из чётного числа рёбер, не превосходящего k?
(*Маршрут* — любая последовательность вершин графа, в которой любые два соседних элемента смежны. Маршрут может проходить через вершину или ребро более одного раза.)

2. В городе Угрюмове **(а)** 4 000 000 **(б)** 2 000 000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых друг с другом жителей.

3. В ориентированном графе $n \geqslant 3$ вершин и любые две вершины соединены ровно одной стрелкой. Тройка вершин называется *циклической*, если стрелки между этими тремя вершинами образуют ориентированный цикл. Докажите, что если в графе число циклических троек больше $\frac{1}{4}C_n^3$, то тогда из любой вершины можно добраться до любой другой по стрелкам.

4. В графе степень каждой вершины равна 3. Докажите, что все его рёбра можно раскрасить в два цвета так, чтобы из каждой вершины выходили рёбра обоих цветов.

5. Дан связный граф на n вершинах. Докажите, что в нем можно выделить $n-1$ рёбер и расставить на них стрелки так, чтобы для любых двух вершин, соединенных ребром в исходном графе, из одной из них в другую можно было пройти по стрелкам.

6. Рёбра полного графа раскрашены в три цвета так, что для каждого цвета из любой вершины можно добраться до любой другой по рёбрам этого цвета. Докажите, что в графе найдутся три вершины, рёбра между которыми трёх разных цветов.

Часть II

Материалы группы 10–2

1 Алгебра

Классическая ТЧ

1. Найдите все натуральные (m, n) такие, что

$$11^n + 2^n + 6 = m^3.$$

2. Существуют ли натуральные числа a, b, c, большие 10^{10} и такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2025?

3. Найдите все тройки (a, b, c) попарно различных натуральных чисел, для которых числа $ab + 3, bc + 3$ и $ca + 3$ можно расставить в один ряд слева направо так, что первое число будет делиться на второе, а второе – на третье.

4. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$

5. Для каждого натурального числа n выпишем все его делители в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Найдите все n, для которых

$$2025 \cdot n = d_{20} \cdot d_{25}.$$

6. Найдите все наборы натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ такие, что

$$x_{i+2}^2 = \text{НОК}(x_{i+1}, x_i) + \text{НОК}(x_i, x_{i-1})$$

при $i = 1, 2, \ldots, 20$, где $x_0 = x_{20}$, $x_{21} = x_1$, $x_{22} = x_2$.

7. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

8. Пусть a, b, c, d, e — различные натуральные числа такие, что

$$a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5.$$

Докажите, что число $ac + bd$ является составным.

Неклассическая ТЧ

1. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 100$. Игроки A и B играют в следующую игру: они по очереди выбирают число с доски и стирают его. Начинает игрок A. Если после хода игрока (после того, как он стёр число с доски) сумма стёртых чисел не может быть выражена как разность двух точных квадратов, то этот игрок проигрывает. В противном случае игра продолжается. У какого игрока существует выигрышная стратегия?

2. На доске записаны n положительных целых чисел. Разрешается добавлять на доску положительные целые числа вида $c = \frac{a+b}{a-b}$, где a и b — числа, уже записанные на доске. Найдите минимальное значение n, при котором, добавляя числа описанным способом, можно получить любое положительное целое число на доске. Для такого n определите, какие числа были записаны на доске в начале.

3. Для натурального $a_0 > 1$, последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задана рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{если } \sqrt{a_n} \text{ целое,} \\ a_n + 3 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определите значения a_0, при которых существует такое A, что $a_n = A$ для бесконечного числа индексов n.

4. На доске написано положительное трёхзначное число. Каждую секунду число n на доске заменяется на $n + \frac{n}{p}$, где p — наибольший простой делитель n. Докажите, что либо через 999 секунд, либо через 1000 секунд число на доске станет степенью двойки.

5. Пусть $n \geqslant 2$ — целое число, и пусть A_n — множество

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant k < n\}.$$

Найти наибольшее положительное целое число, которое нельзя представить в виде суммы одного или нескольких (не обязательно различных) элементов множества A_n.

6. Пусть $n \geqslant 100$ — целое число. Иван пишет числа $n, n+1, \ldots, 2n$ на различных карточках. Затем он перемешивает эти $n+1$ карточек и делит их на две стопки. Докажите, что хотя бы в одной из стопок найдутся две карточки, сумма чисел на которых является полным квадратом.

7. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа x, y, z на доске стираются, а вместо них выписываются числа

$$x + \frac{1}{yz}, \quad y + \frac{1}{zx}, \quad z + \frac{1}{xy}.$$

Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел.

8. Изначально на доске написано число 2026. Если существуют натуральные числа a, b, k такие, что число $a^k + b^k$ написано на доске, то на доску можно дописать число $a^{k'} + b^{k'}$ для любого натурального k'. Найдите все положительные числа, которые могут оказаться на доске.

Многомногочленов

1. Приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0)P(1) = 0$.

2. Числа от 1 до 2025 расположены по кругу в порядке возрастания. Для любых трех последовательных чисел i, j, k рассматривается многочлен $(x-i)(x-j)(x-k)$. Обозначим за $S(x)$ сумму всех таких многочлены. Докажите, что у него есть целый корень.

3. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трёхчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго.

4. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами. Бесконечная последовательность различных натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2$, и т.д. Какую степень может иметь $P(x)$?

5. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(P(n) + n)$ является простым числом для бесконечного набора целых чисел n.

6. Найдите наибольшее натуральное n, такое что существуют n многочленов с вещественными коэффициентами, сумма любых двух которых не имеет корня, а сумма любых трех — имеет.

7. Дано натуральное число n. Игорь задумал пару различных многочленов степени n (с вещественными коэффициентами), аналогично Антон задумал пару различных многочленов степени n. Иван знает n; его цель — выяснить, одинаковые ли пары многочленов у Игоря и Антона. Иван выбирает набор из k вещественных чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ и сообщает эти числа. В ответ Игорь заполняет таблицу $2 \times k$: для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ он вписывает в две клетки i-го столбца пару чисел $P(x_i), Q(x_i)$ (в любом из двух возможных порядков), где P и Q — задуманные им многочлены. Аналогичную таблицу заполняет Антон. При каком наименьшем k Иван сможет (глядя на таблицы) наверняка добиться цели?

8. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Обозначим за n максимальный коэффициент многочлена $P(x)$. Известно, что нашлись такие натуральные k и l, что $k < l$, $n < l$, и выполняются равенства $P(k) = Q(k)$, $P(l) = Q(l)$. Докажите, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равны.

Алгебраический разнобой

1. Даниил хочет придумать два вещественных числа S и P, а после этого расставить по окружности шесть попарно различных вещественных чисел так, чтобы для любых трех подряд идущих по окружности чисел было выполнено хотя бы одно из двух условий:

1) сумма этих трех чисел равна S;
2) произведение этих трех чисел равно P.

Выясните, осуществимо ли желание Даниила.

2. Действительные числа a, b, c таковы, что $a > b > c$ и выполнено равенство

$$\frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{c-a} + \frac{c-a}{a-b} = -3.$$

Докажите, что $(b-c)^3 > 4(a-b)^3$.

3. Пусть дано произвольное положительное число a. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_1 = \frac{a}{a+1},\ a_{n+1} = \frac{aa_n}{a^2 + a_n - aa_n} \quad \forall n \geqslant 1.$$

Найдите наименьшую константу C такую, что неравенство

$$a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_1 \ldots a_m < C$$

выполняется для всех натуральных m независимо от a.

4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.

5. Пусть S — 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10 000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых принадлежит множеству S. К каждой из 1 000 000 отмеченных точек (x, y, z) прикрепим шарик с написанным на нём числом

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}.$$

На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?

6. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 49, 50$. Аня выполняет следующую операцию: она выбирает три произвольных числа a, b, c с доски, заменяет их их суммой $a+b+c$ и записывает в тетрадь произведение $(a+b)(b+c)(c+a)$. Аня повторяет

такие операции до тех пор, пока на доске не останется всего два числа (всего 24 операции). Затем она вычисляет сумму всех 24 чисел, записанных в тетради. Пусть A и B — максимальная и минимальная возможные суммы, которые может получить Аня. Найдите значение $A - B$.

7. Изначально на доске написано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдется натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное число раз.

8. Дано целое число $n \geqslant 2$ и положительные действительные числа a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_n, b_n такие, что

$$\frac{a_k^2+1}{b_k} \geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_n \quad \text{и} \quad \frac{b_k^2+1}{a_k} \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| \leqslant \sqrt{8n}.$$

2 Геометрия

Вступительный разнобой

1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T, покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T.

2. На продолжении стороны BC остроугольного треугольника ABC за точку C выбрана точка X, на продолжении стороны CA за точку A – точка Y, а на продолжении стороны AB за точку B – точка Z так, что треугольники ABC и XYZ подобны (именно с таким соответствием точек). Докажите, что ортоцентр треугольника XYZ не зависит от выбора точек X, Y, Z.

3. В треугольнике ABC проведена высота AH, медиана CM пересекает его описанную окружность в точке X. Точка D такова, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом. Докажите, что точки C, D, H, X лежат на одной окружности.

4. На высотах, проведённых из вершин A, B, C остроугольного треугольника ABC, выбраны точки D, E, F соответственно так, что углы BDC, AEC, AFB прямые. Докажите, что существует окружность, которая касается прямых AE, AF, BD, BF, CD, CE.

5. Окружность ω лежит внутри окружности Ω и касается её внутренним образом в точке T. Пусть XY – переменная хорда окружности Ω, касающаяся ω. Обозначим X' и Y' середины дуг TY и TX, не содержащих точек X и Y соответственно. Докажите, что всевозможные прямые $X'Y'$ проходят через фиксированную точку.

6. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ на биссектрисах углов при вершинах B и C отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC \parallel AB$, $QB \parallel AC$. Прямая PQ пересекает окружность (ABC) в точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY — равнобедренный.

7. Окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 вложены друг в друга (ω_2 внутри ω_1, ω_3 внутри ω_2, ω_4 внутри ω_3), их пересекают попарно непараллельные прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Для $i = 1, 2, 3$ обозначим точки пересечения ℓ_i с окружностями через A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i. Оказалось, что $A_iB_i + E_iF_i = C_iD_i + G_iH_i$ для $i = 1, 2$. Докажите, что это равенство верно и для $i = 3$.

Следующий разнобой

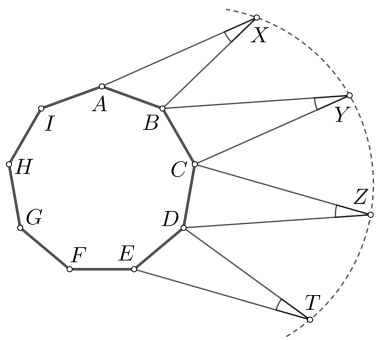
1. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке A_1. На продолжении отрезков A_1B и A_1C за точки B и C выбраны точки X и Y такие, что $A_1X = A_1Y = A_1A$. Докажите, что прямая XY проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F, причём E лежит между B и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямые AE и DF касаются окружности (AOD). Докажите, что они касаются и окружности (EOF).

3. Пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC = CD = DE$, вписан в окружность с центром O. На продолжениях сторон AB и AE за точки B и E выбраны точки X и Y соответственно так, что $AD = BX$ и $AC = EY$. Докажите, что $OX = OY$.

4. Точки M и N — середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Известно, что точки M, N, C, D лежат на одной окружности, а прямые AM и BN касаются этой окружности. Докажите, что четырёхугольник $CMND$ — трапеция.

5. На сторонах правильного девятиугольника $ABCDEFGHI$ во внешнюю сторону построили треугольники XAB, YBC, ZCD и TDE. Известно, что углы X, Y, Z, T этих треугольников равны 20° каждый, а среди углов XAB, YBC, ZCD и TDE каждый следующий на 20° больше предыдущего. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.



6. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр, опущенный из точки B_1 на BC, пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр опущенный из точки B на AK пересекает AC в точке L. Докажите что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

7. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке

K и продолжений сторон AB и CD, окружность ω_2 касается стороны AD в точке L и продолжений сторон AB и CD. Известно, что точки O, K, L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и центр окружности ω лежат на одной прямой.

Пугающий разнобой

1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ в которой основание AD больше основания BC. На её описанной окружности отмечена такая точка E, что $AD \perp BE$. Докажите, что $AE + BC > DE$.

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что

$$\angle ABD + \angle ACD > \angle BAC + \angle BDC.$$

Докажите, что $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$.

3. Докажите, что расстояние между серединой стороны AC треугольника ABC и серединой дуги BAC его описанной окружности не меньше $AB/2$.

4. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, а угол C в полтора раза больше угла A. Какой из углов BCA или ACD больше?

5. В остроугольном треугольнике ABC провели медиану AM, высоту AH и биссектрису AL. Оказалось, что точки B, H, L, M, C лежат на прямой BC именно в таком порядке, причём $LH < LM$. Докажите, что $BC > 2AL$.

6. Точка M внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABM = \angle ACM$, точка N симметрична M относительно середины стороны BC. Докажите, что

$$BM \cdot CM + AM \cdot AN \geqslant 2S_{ABC}.$$

7. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.

8. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром O_B проходит через точки A, C_1 и середину отрезка BH. Окружность с центром O_C проходит через точки A, B_1 и середину отрезка CH. Докажите, что $O_BB_1 + O_CC_1 > BC/4$.

Закрепляющий разнобой

1. На сторонах A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 выпуклого многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ взяты точки B_1, B_2, …, B_n соответственно. Докажите, что круги, описанные вокруг треугольников $B_nA_1B_1$, $B_1A_2B_2$, …, $B_{n-1}A_nB_n$, покрывают весь многоугольник.

2. Внутри треугольника ABC выбрана точка P. Точки P_a, P_b, P_c — проекции точки P на высоты из вершин A, B, C соответственно. Оказалось, что $AP_a = BP_b = CP_c = d$. Докажите, что d — диаметр вписанной окружности треугольника ABC.

3. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей (APD) и (BQD), параллельна прямой AD.

4. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность ω. Точка E лежит на продолжении стороны AB за точку B, а точка F — на продолжении стороны AD за точку D, причём отрезок EF проходит через вершину C. Отрезок DE вторично пересекает окружность ω в точке X. Докажите, что $AF = FX$.

5. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = CE$. На дуге DE описанной окружности треугольника ADE, не содержащей точку A, нашлись такие точки P и Q, что $AB = PC$ и $AC = BQ$. Докажите, что $AP = AQ$.

6. Фиксированы окружность ω, точка A на ней и точка P вне окружности. Переменная секущая, проходящая через P, пересекает окружность в точках B и C. Докажите, что ортоцентры треугольников ABC лежат на одной окружности.

7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в двух точках X_1 и Y_1. Окружности с диаметрами BC и AD пересекаются в двух точках X_2 и Y_2. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в двух точках X_3 и Y_3. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 пересекаются в одной точке.

8. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Отложим на лучах BA и CA отрезки BA_b и CA_c соответственно, равные по длине BC. Пусть O_a — центр окружности (AA_bA_c). Аналогично определим точки O_b и O_c. Докажите, что точка O является ортоцентром треугольника $O_aO_bO_c$.

3 Комбинаторика

Клетки

1. Фигура, называемая *100-гребнем*, состоит из 150 единичных клеток. Она получается из прямоугольника 2×100 (или 100×2), если удалить в нём клетки, идущие через одну вдоль одной из двух длинных сторон.

Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить на доске 200×200, чтобы в ней не осталось 100-гребня из незакрашенных клеток?

2. Клетки доски $(2m + 1) \times (2n + 1)$ красятся в два цвета — белый и черный. Единичная клетка строки (столбца) называется *доминирующей по строке* (по столбцу), если более половины клеток этой строки (этого столбца) имеет одинаковый цвет с этой клеткой. Докажите, что по крайней мере $m + n + 1$ клеток доски одновременно доминируют по строке и по столбцу.

3. Существует ли натуральное число n, для которого можно покрасить все клетки доски $n \times n$ в три цвета так, чтобы все цвета встречались, не было двух одноцветных соседних клеток и все клетки любых двух цветов составляли связное множество клеток?

4. В таблице $n \times n$ все клетки изначально белые. За один ход можно выбрать 5 подряд идущих клеток (в одной строке или в одном столбце) и перекрасить их (белая клетка становится чёрной, а чёрная — белой). При каких n можно добиться того, чтобы в таблице осталась ровно одна белая клетка?

5. Для какого наибольшего k можно раскрасить клетки таблицы $2026 \times k$ в 1013 цветов так, чтобы не нашлось двух строк и двух столбцов, на пересечении которых все 4 клетки одного цвета?

6. Каждая клетка квадратной таблицы 11×11 окрашена в один из k цветов. Оказалось, что если какие-то две одноцветные клетки лежат в одном столбце, то справа от верхней из них больше нет клеток этого цвета. При каком наименьшем k это может быть?

7. Каждая клетка таблицы 30×30 содержит одно из чисел: -1, 0 или 1, причём каждое из этих трёх чисел встречается ровно 300 раз. Возможно ли, чтобы все 60 сумм по строкам и столбцам были различны?

Игры

1. Маша и Таня выбирают натуральное число k играют в следующую игру на клетчатой доске 9×9. На каждом своём ходу Маша выбирает пустой квадратик 1×1 и пишет в него 0. Затем Таня k раз выбирает пустые квадратики и пишет в каждом по единичке. Если после какого-то хода сумма чисел в каждой строке и в каждом столбике нечётна, выигрывает Таня. Если табличка заполнена до конца, побеждает Маша. При каком минимальном k побеждает Таня?

2. Паша и Гриша играют в игру. Они по очереди красят непокрашенные стороны 2025-угольника таким образом, чтобы никакие две соседние стороны не были покрашены в один цвет. Проигрывает тот, кто последним ввёл в игру новый цвет. Начинает Паша. Кто выиграет при правильной игре?

3. Алиса и Базилио играют в следующую игру; из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

4. Изначально на столе лежат три кучки из 100, 101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучи, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (на своем первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

5. Клетчатый квадрат 100×100 разрезан на доминошки (прямоугольники 1×2). Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседних по стороне клетки, между которыми был проведен разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т. е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

6. В ряд выписаны числа $1, 2, \ldots, 100$. Петя и Вася играют в игру. В каждый ход Петя ход указывает на несколько подряд идущих в ряду чисел, после чего Вася одновременно увеличивает все указанные числа на 1 либо уменьшает их все на 1. Какого наибольшего количества кратных 4 чисел может добиться Петя такими ходами вне зависимости от игры Васи?

Процессы

1. Рассмотрим отрезок $[0;1]$. На каждом шагу мы можем разбить один из имеющихся отрезков на два новых и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что сумма чисел на доске никогда не превысит $1/2$.

2. Петя написал на доске некоторое натуральное число. Каждую минуту Вася выбирал число x из уже написанных на доске и называл его Пете, а Петя вычислял для этого числа выражения $2x+1$ и $\dfrac{x}{x+2}$ и выписывал их на доску. Через некоторое время пришла Маша и увидела на доске число 2020. Узнав, по каким правилам выписывались числа и немного подумав, она сказала, что число 2020 Петя написал самым первым. Не ошиблась ли Маша?

3. Пусть $n > 1$ — натуральное число. На доске в порядке $1, 2, 3, \ldots, n$ выписаны числа. Разрешается выполнять следующие операции:

1. Если три соседних числа x, y, z удовлетворяют условию $x + y + z \equiv 0 \pmod 3$, то их можно заменить на y, z, x.

2. Если два соседних числа x, y удовлетворяют условию $x \equiv y \pmod 3$, то их можно заменить на y, x.

Найдите все n, для которых с помощью таких операций исходную последовательность можно преобразовать в $n, 1, 2, \ldots, n-1$.

4. По кругу стоит $3n$ человек — это n семей «мама–папа–ребенок». Любые два человека, стоящие рядом, могут поменяться местами, кроме случая, когда ребёнок меняется местом с одним из своих родителей (это не разрешено). При каких n с помощью таких обменов людей можно расставить по кругу в любом порядке? (Перестановки, отличающиеся циклическим сдвигом, считаются различными.)

5. В марсианском метро 2026 станций, некоторые из них объединены в ветки. По веткам можно из любой станции доехать до любой другой. На каждой станции стоит несколько полицейских. Глава службы охраны за один день может выбрать любую ветку, а также станцию из неё, снять с неё всех полицейских и почти поровну распределить между всеми станциями этой ветки (при этом он сам решает, куда направится больше полицейских, куда меньше). Докажите, что такими операциями можно как угодно перераспределить полицейских по станциям. (Все полицейские считаются одинаковыми, т.е. нас интересует только их количество на станции).

Графы

1. На тренинг по личностному росту пришло 30 человек. Оказалось, что любых пятерых можно посадить за круглый стол с условием, чтобы рядом сидящие были знакомы. Какое минимальное количество пар знакомых может присутствовать на тренинге?

2. Дан граф, в котором любые две вершины можно соединить маршрутом из не более 100 рёбер. Выяснилось, что любые две вершины можно соединить маршрутом из чётного числа рёбер. Для какого наименьшего натурального k можно с гарантией утверждать, что любые две вершины можно соединить маршрутом из чётного числа рёбер, не превосходящего k?
(*Маршрут* — любая последовательность вершин графа, в которой любые два соседних элемента смежны. Маршрут может проходить через вершину или ребро более одного раза.)

3. В городе Угрюмове **(а)** $4\,000\,000$ **(б)** $2\,000\,000$ жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых друг с другом жителей.

4. В ориентированном графе $n \geqslant 3$ вершин и любые две вершины соединены ровно одной стрелкой. Тройка вершин называется *циклической*, если стрелки между этими тремя вершинами образуют ориентированный цикл. Докажите, что если в графе число циклических троек больше $\frac{1}{4}C_n^3$, то тогда из любой вершины можно добраться до любой другой по стрелкам.

5. В графе степень каждой вершины равна 3. Докажите, что все его рёбра можно раскрасить в два цвета так, чтобы из каждой вершины выходили рёбра обоих цветов.

6. Дан связный граф на n вершинах. Докажите, что в нем можно выделить $n-1$ рёбер и расставить на них стрелки так, чтобы для любых двух вершин, соединенных ребром в исходном графе, из одной из них в другую можно было пройти по стрелкам.

7. Рёбра полного графа раскрашены в три цвета так, что для каждого цвета из любой вершины можно добраться до любой другой по рёбрам этого цвета. Докажите, что в графе найдутся три вершины, рёбра между которыми трёх разных цветов.

Часть III

Материалы группы 10–3

1 Алгебра

Классическая ТЧ

1. Найдите все натуральные (m, n) такие, что

$$11^n + 2^n + 6 = m^3.$$

2. Существуют ли натуральные числа a, b, c, большие 10^{10} и такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2025?

3. Найдите все тройки (a, b, c) попарно различных натуральных чисел, для которых числа $ab + 3, bc + 3$ и $ca + 3$ можно расставить в один ряд слева направо так, что первое число будет делиться на второе, а второе — на третье.

4. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$

5. Для каждого натурального числа n выпишем все его делители в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Найдите все n, для которых

$$2025 \cdot n = d_{20} \cdot d_{25}.$$

6. Найдите все наборы натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ такие, что

$$x_{i+2}^2 = \text{НОК}(x_{i+1}, x_i) + \text{НОК}(x_i, x_{i-1})$$

при $i = 1, 2, \ldots, 20$, где $x_0 = x_{20}$, $x_{21} = x_1$, $x_{22} = x_2$.

7. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

8. Пусть a, b, c, d, e — различные натуральные числа такие, что

$$a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5.$$

Докажите, что число $ac + bd$ является составным.

Неклассическая ТЧ

1. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 100$. Игроки A и B играют в следующую игру: они по очереди выбирают число с доски и стирают его. Начинает игрок A. Если после хода игрока (после того, как он стёр число с доски) сумма стёртых чисел не может быть выражена как разность двух точных квадратов, то этот игрок проигрывает. В противном случае игра продолжается. У какого игрока существует выигрышная стратегия?

2. На доске записаны n положительных целых чисел. Разрешается добавлять на доску положительные целые числа вида $c = \frac{a+b}{a-b}$, где a и b — числа, уже записанные на доске. Найдите минимальное значение n, при котором, добавляя числа описанным способом, можно получить любое положительное целое число на доске. Для такого n определите, какие числа были записаны на доске в начале.

3. Для натурального $a_0 > 1$, последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задана рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{если } \sqrt{a_n} \text{ целое,} \\ a_n + 3 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определите значения a_0, при которых существует такое A, что $a_n = A$ для бесконечного числа индексов n.

4. На доске написано положительное трёхзначное число. Каждую секунду число n на доске заменяется на $n + \frac{n}{p}$, где p — наибольший простой делитель n. Докажите, что либо через 999 секунд, либо через 1000 секунд число на доске станет степенью двойки.

5. Пусть $n \geqslant 2$ — целое число, и пусть A_n — множество

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant k < n\}.$$

Найти наибольшее положительное целое число, которое нельзя представить в виде суммы одного или нескольких (не обязательно различных) элементов множества A_n.

6. Пусть $n \geqslant 100$ — целое число. Иван пишет числа $n, n+1, \ldots, 2n$ на различных карточках. Затем он перемешивает эти $n+1$ карточек и делит их на две стопки. Докажите, что хотя бы в одной из стопок найдутся две карточки, сумма чисел на которых является полным квадратом.

7. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа x, y, z на доске стираются, а вместо них выписываются числа

$$x + \frac{1}{yz}, \quad y + \frac{1}{zx}, \quad z + \frac{1}{xy}.$$

Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел.

8. Изначально на доске написано число 2026. Если существуют натуральные числа a, b, k такие, что число $a^k + b^k$ написано на доске, то на доску можно дописать число $a^{k'} + b^{k'}$ для любого натурального k'. Найдите все положительные числа, которые могут оказаться на доске.

Многомногочленов

1. Приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0)P(1) = 0$.

2. Числа от 1 до 2025 расположены по кругу в порядке возрастания. Для любых трех последовательных чисел i, j, k рассматривается многочлен $(x-i)(x-j)(x-k)$. Обозначим за $S(x)$ сумму всех таких многочлены. Докажите, что у него есть целый корень.

3. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трёхчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго.

4. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами. Бесконечная последовательность различных натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2$, и т.д. Какую степень может иметь $P(x)$?

5. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(P(n) + n)$ является простым числом для бесконечного набора целых чисел n.

6. Найдите наибольшее натуральное n, такое что существуют n многочленов с вещественными коэффициентами, сумма любых двух которых не имеет корня, а сумма любых трех — имеет.

7. Дано натуральное число n. Игорь задумал пару различных многочленов степени n (с вещественными коэффициентами), аналогично Антон задумал пару различных многочленов степени n. Иван знает n; его цель — выяснить, одинаковые ли пары многочленов у Игоря и Антона. Иван выбирает набор из k вещественных чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ и сообщает эти числа. В ответ Игорь заполняет таблицу $2 \times k$: для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ он вписывает в две клетки i-го столбца пару чисел $P(x_i), Q(x_i)$ (в любом из двух возможных порядков), где P и Q — задуманные им многочлены. Аналогичную таблицу заполняет Антон. При каком наименьшем k Иван сможет (глядя на таблицы) наверняка добиться цели?

8. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Обозначим за n максимальный коэффициент многочлена $P(x)$. Известно, что нашлись такие натуральные k и l, что $k < l$, $n < l$, и выполняются равенства $P(k) = Q(k)$, $P(l) = Q(l)$. Докажите, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равны.

Алгебраический разнобой

1. Даниил хочет придумать два вещественных числа S и P, а после этого расставить по окружности шесть попарно различных вещественных чисел так, чтобы для любых трех подряд идущих по окружности чисел было выполнено хотя бы одно из двух условий:

1) сумма этих трех чисел равна S;
2) произведение этих трех чисел равно P.

Выясните, осуществимо ли желание Даниила.

2. Действительные числа a, b, c таковы, что $a > b > c$ и выполнено равенство

$$\frac{a-b}{b-c}+\frac{b-c}{c-a}+\frac{c-a}{a-b}=-3.$$

Докажите, что $(b-c)^3 > 4(a-b)^3$.

3. Пусть дано произвольное положительное число a. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_1=\frac{a}{a+1},\ a_{n+1}=\frac{aa_n}{a^2+a_n-aa_n}\quad \forall n\geqslant 1.$$

Найдите наименьшую константу C такую, что неравенство

$$a_1+a_1a_2+\ldots+a_1\ldots a_m<C$$

выполняется для всех натуральных m независимо от a.

4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n\geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.

5. Пусть S — 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10 000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых принадлежит множеству S. К каждой из 1 000 000 отмеченных точек (x, y, z) прикрепим шарик с написанным на нём числом

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}.$$

На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?

6. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 49, 50$. Аня выполняет следующую операцию: она выбирает три произвольных числа a, b, c с доски, заменяет их их суммой $a+b+c$ и записывает в тетрадь произведение $(a+b)(b+c)(c+a)$. Аня повторяет

такие операции до тех пор, пока на доске не останется всего два числа (всего 24 операции). Затем она вычисляет сумму всех 24 чисел, записанных в тетради. Пусть A и B — максимальная и минимальная возможные суммы, которые может получить Аня. Найдите значение $A - B$.

7. Изначально на доске написано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдется натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное число раз.

8. Дано целое число $n \geqslant 2$ и положительные действительные числа a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_n, b_n такие, что

$$\frac{a_k^2+1}{b_k} \geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_n \quad \text{и} \quad \frac{b_k^2+1}{a_k} \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| \leqslant \sqrt{8n}.$$

2 Геометрия

Вступительный разнобой

1. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке A_1. На продолжении отрезков A_1B и A_1C за точки B и C выбраны точки X и Y такие, что $A_1X = A_1Y = A_1A$. Докажите, что прямая XY проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Окружности ω_1 и ω_2 касаются Ω внутренним образом и касаются отрезков AB и CD. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения ω_1 и ω_2, проходит через середины дуг AB и CD окружности Ω.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC прямой.

4. На продолжении стороны BC остроугольного треугольника ABC за точку C выбрана точка X, на продолжении стороны CA за точку A – точка Y, а на продолжении стороны AB за точку B – точка Z так, что треугольники ABC и XYZ подобны (именно с таким соответствием точек). Докажите, что ортоцентр треугольника XYZ не зависит от выбора точек X, Y, Z.

5. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, AA_1, BB_1, CC_1 — высоты. Прямая AO пересекает сторону BC в точке O_a, точка M_a — середина отрезка AO_a. Аналогично определим точки M_b и M_c. Докажите, что прямые A_1M_a, B_1M_b, C_1M_c пересекаются в одной точке.

6. В треугольнике ABC проведена высота AH, медиана CM пересекает его описанную окружность в точке X. Точка D такова, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом. Докажите, что точки C, D, H, X лежат на одной окружности.

7. На высотах, проведённых из вершин A, B, C остроугольного треугольника ABC, выбраны точки D, E, F соответственно так, что углы BDC, AEC, AFB прямые. Докажите, что существует окружность, которая касается прямых AE, AF, BD, BF, CD, CE.

Следующий разнобой

1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F, причём E лежит между B и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямые AE и DF касаются окружности (AOD). Докажите, что они касаются и окружности (EOF).

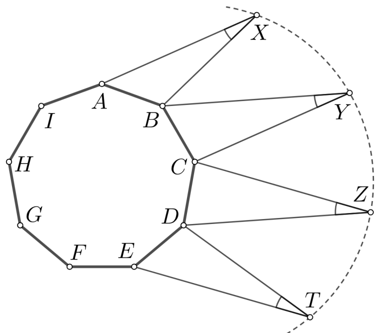
2. В треугольнике ABC продолжения медиан из вершин A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. На стороне AC выбрана точка P, а на стороне BC — точка Q так, что $AP = 2PC$, $BQ = 2QC$. Докажите, что $\angle APB_1 = \angle BQA_1$.

3. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T, покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T.

4. Пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC = CD = DE$, вписан в окружность с центром O. На продолжениях сторон AB и AE за точки B и E выбраны точки X и Y соответственно так, что $AD = BX$ и $AC = EY$. Докажите, что $OX = OY$.

5. Точки M и N — середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Известно, что точки M, N, C, D лежат на одной окружности, а прямые AM и BN касаются этой окружности. Докажите, что четырёхугольник $CMND$ — трапеция.

6. На сторонах правильного девятиугольника $ABCDEFGHI$ во внешнюю сторону построили треугольники XAB, YBC, ZCD и TDE. Известно, что углы X, Y, Z, T этих треугольников равны 20° каждый, а среди углов XAB, YBC, ZCD и TDE каждый следующий на 20° больше предыдущего. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.



7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр, опущенный из точки B_1 на BC, пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр опущенный из точки B на AK пересекает AC в точке L. Докажите что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

Добавка

1. Окружность ω лежит внутри окружности Ω и касается её внутренним образом в точке T. Пусть XY – переменная хорда окружности Ω, касающаяся ω. Обозначим X' и Y' середины дуг TY и TX, не содержащих точек X и Y соответственно. Докажите, что всевозможные прямые $X'Y'$ проходят через фиксированную точку.

2. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ на биссектрисах углов при вершинах B и C отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC \parallel AB$, $QB \parallel AC$. Прямая PQ пересекает окружность (ABC) в точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY — равнобедренный.

3. Окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 вложены друг в друга (ω_2 внутри ω_1, ω_3 внутри ω_2, ω_4 внутри ω_3), их пересекают попарно непараллельные прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Для $i = 1, 2, 3$ обозначим точки пересечения ℓ_i с окружностями через A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i. Оказалось, что $A_iB_i + E_iF_i = C_iD_i + G_iH_i$ для $i = 1, 2$. Докажите, что это равенство верно и для $i = 3$.

Пугающий разнобой

1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ в которой основание AD больше основания BC. На её описанной окружности отмечена такая точка E, что $AD \perp BE$. Докажите, что $AE + BC > DE$.

2. В треугольнике ABC проведены высоты BE и CF. Точка I — центр вписанной окружности, точка J — центр вневписанной окружности со стороны вершины A. Докажите, что $IJ > EF$.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ угол при вершине A тупой, точка M — середина стороны BC. Докажите, что $2AM < BD + CD$.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что

$$\angle ABD + \angle ACD > \angle BAC + \angle BDC.$$

Докажите, что $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$.

5. Докажите, что расстояние между серединой стороны AC треугольника ABC и серединой дуги BAC его описанной окружности не меньше $AB/2$.

6. В остроугольном треугольнике ABC провели медиану AM, высоту AH и биссектрису AL. Оказалось, что точки B, H, L, M, C лежат на прямой BC именно в таком порядке, причём $LH < LM$. Докажите, что $BC > 2AL$.

7. Точка M внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABM = \angle ACM$, точка N симметрична M относительно середины стороны BC. Докажите, что

$$BM \cdot CM + AM \cdot AN \geqslant 2S_{ABC}.$$

Пугающий разнобой. Добавка

1. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.

2. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром O_B проходит через точки A, C_1 и середину отрезка BH. Окружность с центром O_C проходит через точки A, B_1 и середину отрезка CH. Докажите, что $O_BB_1 + O_CC_1 > BC/4$.

Закрепляющий разнобой

1. На сторонах A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 выпуклого многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ взяты точки B_1, B_2, ..., B_n соответственно. Докажите, что круги, описанные вокруг треугольников $B_nA_1B_1$, $B_1A_2B_2$, ..., $B_{n-1}A_nB_n$, покрывают весь многоугольник.

2. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) нашлись такие точки P и Q соответственно, что $CP = DP$ и $AQ = BQ$. Докажите, что $\angle AQB = \angle CPD$.

3. Окружность ω, вписанная в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Пусть точка I — центр окружности ω, а O — центр описанной окружности треугольника ABC. Окружность (AID), пересекает вторично прямую AO в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω.

4. Внутри треугольника ABC выбрана точка P. Точки P_a, P_b, P_c — проекции точки P на высоты из вершин A, B, C соответственно. Оказалось, что $AP_a = BP_b = CP_c = d$. Докажите, что d — диаметр вписанной окружности треугольника ABC.

5. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей (APD) и (BQD), параллельна прямой AD.

6. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = CE$. На дуге DE описанной окружности треугольника ADE, не содержащей точку A, нашлись такие точки P и Q, что $AB = PC$ и $AC = BQ$. Докажите, что $AP = AQ$.

7. Фиксированы окружность ω, точка A на ней и точка P вне окружности. Переменная секущая, проходящая через P, пересекает окружность в точках B и C. Докажите, что ортоцентры треугольников ABC лежат на одной окружности.

8. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в двух точках X_1 и Y_1. Окружности с диаметрами BC и AD пересекаются в двух точках X_2 и Y_2. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в двух точках X_3 и Y_3. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 пересекаются в одной точке.

3 Комбинаторика

Клетки

1. На шахматной доске 8×8 отмечено 12 клеток. Докажите, что можно выбрать 4 столбца и 4 строки, чтобы в объединении этих строк и столбцов содержались все отмеченные клетки.

2. Клетки таблицы $n \times n$ покрашены в два цвета. Оказалось, что нет такой пары строк и пары столбцов, что все 4 клетки на пересечении этих строк и столбцов одного цвета. Какое наибольшее значение может принимать n?

3. Фигура, называемая *100-гребнем*, состоит из 150 единичных клеток. Она получается из прямоугольника 2×100 (или 100×2), если удалить в нём клетки, идущие через одну вдоль одной из двух длинных сторон.

Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить на доске 200×200, чтобы в ней не осталось 100-гребня из незакрашенных клеток?

4. Клетки доски $(2m + 1) \times (2n + 1)$ красятся в два цвета — белый и черный. Единичная клетка строки (столбца) называется *доминирующей по строке* (по столбцу), если более половины клеток этой строки (этого столбца) имеет одинаковый цвет с этой клеткой. Докажите, что по крайней мере $m + n + 1$ клеток доски одновременно доминируют по строке и по столбцу.

5. В таблице $n \times n$ все клетки изначально белые. За один ход можно выбрать 5 подряд идущих клеток (в одной строке или в одном столбце) и перекрасить их (белая клетка становится чёрной, а чёрная — белой). При каких n можно добиться того, чтобы в таблице осталась ровно одна белая клетка?

6. Существует ли натуральное число n, для которого можно покрасить все клетки доски $n \times n$ в три цвета так, чтобы все цвета встречались, не было двух одноцветных соседних клеток и все клетки любых двух цветов составляли связное множество клеток?

7. Каждая клетка квадратной таблицы 11×11 окрашена в один из k цветов. Оказалось, что если какие-то две одноцветные клетки лежат в одном столбце, то справа от верхней из них больше нет клеток этого цвета. При каком наименьшем k это может быть?

8. По доске $n \times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причем каждый её ход был ровно на одну клетку. Клетки занумерованы от 1 до n^2 в порядке прохождения ладьи. Пусть M — максимальная разность между номерами соседних (по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение M?

Клетки, добавка

1. Для какого наибольшего k можно раскрасить клетки таблицы $2026 \times k$ в 1013 цветов так, чтобы не нашлось двух строк и двух столбцов, на пересечении которых все 4 клетки одного цвета?

2. Каждая клетка таблицы 30×30 содержит одно из чисел: -1, 0 или 1, причём каждое из этих трёх чисел встречается ровно 300 раз. Возможно ли, чтобы все 60 сумм по строкам и столбцам были различны?

3. Петя записал на доске 100 различных целых чисел. Вася должен поставить в каждую клетку таблицы 100×100 по целому числу так, чтобы в каждом клетчатом прямоугольнике 1×3 (как горизонтальном, так и вертикальном) сумма чисел была равна одному из чисел, выписанных на доске. При каком наибольшем целом n Вася гарантированно (т. е. какие бы числа Петя ни написал) сможет заполнить таблицу так, чтобы в ней встретились хотя бы по разу числа $1, 2, ..., n$ (и, возможно, какие-то другие целые числа)?

Игры

1. На плоскости отмечено $n \geqslant 3$ точек (никакие три не лежат на одной прямой) и k отрезков, соединяющих некоторые из них. Фома́ и Ерёма играют в следующую игру. Ходы делаются по очереди. Сначала Фома выбирает две точки, называет одну из них A, другую B и кладет фишку в A. После этого каждым своим ходом Ерёма передвигает фишку из одной отмеченной точки в другую вдоль отрезка (если это возможно), а Фома каждым своим ходом удаляет один отрезок (кроме отмеченных точек). Ерёма победит, если сможет переместить фишку в B, если не сможет — то победит Фома. Число точек n фиксировано. При каком наибольшем k Фома может гарантировать себе победу независимо от того, какие отрезки проведены изначально?

2. Маша и Таня выбирают натуральное число k играют в следующую игру на клетчатой доске 9×9. На каждом своём ходу Маша выбирает пустой квадратик 1×1 и пишет в него 0. Затем Таня k раз выбирает пустые квадратики и пишет в каждом по единичке. Если после какого-то хода сумма чисел в каждой строке и в каждом столбике нечётна, выигрывает Таня. Если табличка заполнена до конца, побеждает Маша. При каком минимальном k побеждает Таня?

3. Паша и Гриша играют в игру. Они по очереди красят непокрашенные стороны 2025-угольника таким образом, чтобы никакие две соседние стороны не были покрашены в один цвет. Проигрывает тот, кто последним ввёл в игру новый цвет. Начинает Паша. Кто выиграет при правильной игре?

4. Алиса и Базилио играют в следующую игру; из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

5. Изначально на столе лежат три кучки из 100, 101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучи, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (на своем первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

6. Клетчатый квадрат 100×100 разрезан на доминошки (прямоугольники 1×2). Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседних по стороне клетки, между которыми был проведен разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т. е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

Процессы

1. Вокруг кучи золотых монет сидят алчные гномы, у каждого из которых есть чётное количество своих монет. Ровно в полдень каждый гном отдает половину своих монет гному справа и ровно в полночь, если у него на данный момент нечётное количество монет, ворует одну золотую монету из центра круга. Так продолжается много дней подряд. Докажите, что настанет день, когда у всех гномов будет поровну монет.

2. Рассмотрим отрезок $[0;1]$. На каждом шагу мы можем разбить один из имеющихся отрезков на два новых и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что сумма чисел на доске никогда не превысит $1/2$.

3. Петя написал на доске некоторое натуральное число. Каждую минуту Вася выбирал число x из уже написанных на доске и называл его Пете, а Петя вычислял для этого числа выражения $2x+1$ и $\dfrac{x}{x+2}$ и выписывал их на доску. Через некоторое время пришла Маша и увидела на доске число 2020. Узнав, по каким правилам выписывались числа и немного подумав, она сказала, что число 2020 Петя написал самым первым. Не ошиблась ли Маша?

4. Пусть $n > 1$ — натуральное число. На доске в порядке $1, 2, 3, \ldots, n$ выписаны числа. Разрешается выполнять следующие операции:

1. Если три соседних числа x, y, z удовлетворяют условию $x + y + z \equiv 0 \pmod 3$, то их можно заменить на y, z, x.
2. Если два соседних числа x, y удовлетворяют условию $x \equiv y \pmod 3$, то их можно заменить на y, x.

Найдите все n, для которых с помощью таких операций исходную последовательность можно преобразовать в $n, 1, 2, \ldots, n-1$.

5. В одной из вершин n-угольника лежит одна монета, в остальных ничего не лежит. За один ход можно убрать монету из одной из вершин и добавить 6 монет в соседнюю с ней вершину. При каких n можно добиться того, чтобы во всех вершинах было поровну монет?

Графы

1. На тренинг по личностному росту пришло 30 человек. Оказалось, что любых пятерых можно посадить за круглый стол с условием, чтобы рядом сидящие были знакомы. Какое минимальное количество пар знакомых может присутствовать на тренинге?

2. Дан граф, в котором любые две вершины можно соединить маршрутом из не более 100 рёбер. Выяснилось, что любые две вершины можно соединить маршрутом из чётного числа рёбер. Для какого наименьшего натурального k можно с гарантией утверждать, что любые две вершины можно соединить маршрутом из чётного числа рёбер, не превосходящего k?
(*Маршрут* — любая последовательность вершин графа, в которой любые два соседних элемента смежны. Маршрут может проходить через вершину или ребро более одного раза.)

3. В городе Угрюмове **(а)** $4\,000\,000$ **(б)** $2\,000\,000$ жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых друг с другом жителей.

4. В ориентированном графе $n \geqslant 3$ вершин и любые две вершины соединены ровно одной стрелкой. Тройка вершин называется *циклической*, если стрелки между этими тремя вершинами образуют ориентированный цикл. Докажите, что если в графе число циклических троек больше $\frac{1}{4}C_n^3$, то тогда из любой вершины можно добраться до любой другой по стрелкам.

5. В графе степень каждой вершины равна 3. Докажите, что все его рёбра можно раскрасить в два цвета так, чтобы из каждой вершины выходили рёбра обоих цветов.

6. Дан связный граф на n вершинах. Докажите, что в нем можно выделить $n-1$ рёбер и расставить на них стрелки так, чтобы для любых двух вершин, соединенных ребром в исходном графе, из одной из них в другую можно было пройти по стрелкам.

7. Рёбра полного графа раскрашены в три цвета так, что для каждого цвета из любой вершины можно добраться до любой другой по рёбрам этого цвета. Докажите, что в графе найдутся три вершины, рёбра между которыми трёх разных цветов.

Часть IV

Тренировочные олимпиады

Тренировочная олимпиада 1

1. Дима утверждает, что все натуральные числа от 1 до 2026 (включительно) можно разбить на два непересекающихся множества одинакового размера A и B таким образом, чтобы среднее арифметическое чисел множества A оказалось числом из B, а среднее арифметическое чисел множества B оказалось числом из A. Прав ли Дима?

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете BC выбрана произвольная точка D, точка E — проекция D на AB, точка F — проекция C на AD, точки M и N — середины отрезков BC и CE соответственно. Докажите, что точки D, F, N, M лежат на одной окружности.

3. У воспитательницы детского сада в группе 2026 детей. У каждого ребёнка либо есть в кармане конфета, либо нет конфеты. Воспитательница может назвать двух детей A и B и попросить ребёнка A поделиться конфетой с ребёнком B. В случае, когда у ребёнка A есть конфета, а у ребёнка B — нету, в результате просьбы конфета скрытно передаётся от ребёнка A к ребёнку B. Во всех остальных случаях ничего не происходит. При этом воспитательница не может уследить, состоялась ли передача конфеты. Цель воспитательницы — в конце дня указать двух детей, у которых гарантированно поровну конфет. Сможет ли воспитательница добиться своей цели?

4. Даны неотрицательные действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 2$), сумма которых равна $\frac{n}{2}$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим

$$b_i = a_i + a_i a_{i+1} + a_i a_{i+1} a_{i+2} + \ldots + a_i a_{i+1} \ldots a_{i+n-2} + 2 a_i a_{i+1} \ldots a_{i+n-1}\,,$$

где $a_{j+n} = a_j$ для всех j. Докажите, что $b_i \geqslant 1$ хотя бы для одного индекса i.

Тренировочная олимпиада 1, вариант попроще

1. Дима утверждает, что все натуральные числа от 1 до 2026 (включительно) можно разбить на два непересекающихся множества одинакового размера A и B таким образом, чтобы среднее арифметическое чисел множества A оказалось числом из B, а среднее арифметическое чисел множества B оказалось числом из A. Прав ли Дима?

2. Может ли число

$$\text{НОД}(a^2, b^2) + \text{НОД}(a, bc) + \text{НОД}(b, ac) + \text{НОД}(c, ab)$$

оказаться простым при некоторых натуральных a, b, c?

3. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете BC выбрана произвольная точка D, точка E — проекция D на AB, точка F — проекция C на AD, точки M и N — середины отрезков BC и CE соответственно. Докажите, что точки D, F, N, M лежат на одной окружности.

4. У воспитательницы детского сада в группе 2026 детей. У каждого ребёнка либо есть в кармане конфета, либо нет конфеты. Воспитательница может назвать двух детей A и B и попросить ребёнка A поделиться конфетой с ребёнком B. В случае, когда у ребёнка A есть конфета, а у ребёнка B — нету, в результате просьбы конфета скрытно передаётся от ребёнка A к ребёнку B. Во всех остальных случаях ничего не происходит. При этом воспитательница не может уследить, состоялась ли передача конфеты. Цель воспитательницы — в конце дня указать двух детей, у которых гарантированно поровну конфет. Сможет ли воспитательница добиться своей цели?

Тренировочная олимпиада 2

1. Все ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ равны 1, а сумма коэффициентов равна 20. Могут ли 13 коэффициентов многочлена $(P(x))^2$ оказаться равны 9?

2. Дано n попарно различных натуральных чисел. Докажите, что их можно обозначить a_1, a_2, $\ldots$, a_n так, чтобы для всех $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ выполнялось $a_j^2 \neq a_i a_k$.

3. Про вписанный четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = 3\angle B$. На стороне AB отмечена точка C_1, а на стороне BC — точка A_1 так, что $AA_1 = AC = CC_1$. Докажите, что $3A_1C_1 > BD$.

4. На координатной плоскости в первой четверти проведено 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки — зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по принципу «угол падения равен углу отражения». (При попадании в край зеркала луч света не меняет своего направления.) Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, что луч отразится от зеркал не более 150 раз.

Тренировочная олимпиада 2, вариант попроще

1. Все ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ равны 1, а сумма коэффициентов равна 20. Могут ли 13 коэффициентов многочлена $(P(x))^2$ оказаться равны 9?

2. Имеется 15 изначально пустых ящиков. За один ход разрешается выбрать несколько ящиков и добавить в них количества абрикосов, равные некоторым попарно различным степеням двойки. При каком наименьшем натуральном k можно добиться, чтобы после некоторых k ходов во всех ящиках оказалось поровну абрикосов?

3. Дано n попарно различных натуральных чисел. Докажите, что их можно обозначить a_1, a_2, $\ldots$, a_n так, чтобы для всех $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ выполнялось $a_j^2 \neq a_i a_k$.

4. Про вписанный четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = 3\angle B$. На стороне AB отмечена точка C_1, а на стороне BC — точка A_1 так, что $AA_1 = AC = CC_1$. Докажите, что $3A_1C_1 > BD$.