Функциональные уравнения. База

При решении функциональных уравнений бывает полезно:

- что-нибудь подставить,
- разделить переменные,
- проверить функцию f на инъективность/сюръективность,
- попытаться записать обычную систему уравнений,
- сделать замену,
- найти какое-нибудь одно решение функционального уравнения.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
$$f(x)f(y)-f(xy)=x+y.$$

2. Найдите все инъективные функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такие что
$$f(x+f(y))=f(f(x))+f(y).$$

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$$f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(-x)=x.$$

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
$$f(f(x)+f(y))=f(x)+y.$$

5. Докажите биективность функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $\forall x,y\in\mathbb{R}$
$$f(f(x)+f(y))=x+y.$$

6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
$$f(x+y)-f(x-y)=4xy.$$

7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y).$$

8. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
$$f(x+y+f(y))=f(f(x))+2y.$$