

Функциональные уравнения. База

При решении функциональных уравнений бывает полезно:

- что-нибудь подставить,
- разделить переменные,
- проверить функцию f на инъективность/сюръективность,
- попытаться записать обычную систему уравнений,
- сделать замену,
- найти какое-нибудь одно решение функционального уравнения.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

2. Найдите все инъективные функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + f(y)) = f(f(x)) + f(y).$$

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + f(y)) = f(x) + y.$$

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = x.$$

5. Докажите биективность функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + f(y)) = x + y.$$

6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) - f(x - y) = 4xy.$$

7. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$$

8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) + f(x)f(y) = x^2y^2 - 2xy.$$

9. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y + f(y)) = f(f(x)) + 2y.$$

10. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy)$$