

Подпор касательной

1. Положительные числа a, b, c, d в сумме равны 1. Докажите неравенство

$$6 \cdot (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}.$$

2. Положительные числа a, b, c, d в сумме дают 4. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

3. Для любых положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 3.$$

4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

5. Вещественные числа x_1, \dots, x_n лежат на отрезке $[-1, 1]$ и в сумме дают 0. Докажите, что

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \leq \frac{n}{4}.$$

6. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3 + 2} + \frac{1}{b^3 + 2} + \frac{1}{c^3 + 2} \geq 1.$$

7. Положительные числа a_1, a_2, \dots, a_n в произведении дают 1. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{1+a_1^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+a_2^2}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{1+a_n^2}{2}} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

8. Для неотрицательных вещественных чисел a, b, c, d с суммой 4 докажите неравенство

$$\frac{a}{b^3 + 4} + \frac{b}{c^3 + 4} + \frac{c}{d^3 + 4} + \frac{d}{a^3 + 4} \geq \frac{2}{3}.$$