

## Разбиения на доминошки

1. Квадрат  $2k \times 2k$  разбит на доминошки. Главная диагональ квадрата разрезает некоторые доминошки на части: треугольник и четырёхугольник. Докажите, что треугольников над диагональю столько же, сколько и под диагональю.
2. Шахматная доска покрыта 32 доминошками. Докажите, что эти доминошки можно одновременно повернуть на  $90^\circ$  или на  $180^\circ$  каждую вокруг центра одной из закрываемых ею клеток так, чтобы по-прежнему вся доска была покрыта.
3. Что больше: число способов разбить квадрат  $2n \times 2n$  на прямоугольники  $1 \times 2$  или число способов разбить квадрат  $3n \times 3n$  на прямоугольники  $1 \times 3$ ?
4. Можно ли какой-нибудь клетчатый многоугольник, все стороны которого имеют нечётную длину, разбить на доминошки?
5. Даны чётные числа  $m$  и  $n$ . Для клетчатого многоугольника  $X$  обозначим через  $d(X)$  число способов разбить его на доминошки. Обозначим:
  - $A$  — прямоугольник  $m \times n$ ;
  - $B$  — прямоугольник  $m \times n$  без четырёх угловых клеток;
  - $C$  — прямоугольник  $m \times n$  без двух верхних угловых клеток;
  - $D$  — прямоугольник  $m \times n$  без двух нижних угловых клеток;
  - $E$  — прямоугольник  $m \times n$  без двух левых угловых клеток;
  - $F$  — прямоугольник  $m \times n$  без двух правых угловых клеток.Докажите соотношение  $d(A) \cdot d(B) = d(C) \cdot d(D) + d(E) \cdot d(F)$ .
6. В клетчатом квадрате  $(2k + 1) \times (2k + 1)$  лежат  $2k^2 + 2k$  доминошек, и ровно одна угловая клетка свободна. За один ход разрешается толкнуть (не поворачивая) доминошку в соседнюю свободную клетку. Докажите, что с помощью таких ходов можно освободить любую другую угловую клетку квадрата.
7. Клетчатый прямоугольник  $m \times n$  разбит на доминошки. Докажите, что все узлы на границе и внутри прямоугольника можно раскрасить в три цвета так, чтобы для каждого двух узлов на расстоянии 1 выполнялось условие: эти узлы разного цвета, если соединяющий их отрезок лежит на границе одной из фигурок домино, и одинакового цвета в противном случае.