По мотивам ВсОШ

1. Сначала на тарелке лежат 75 конфет. Петя и Вася по очереди берут из тарелки любое натуральное количество конфет до тех пор, пока конфет на тарелке не останется. Начинает Петя. При каком наименьшем k Петя может играть так, чтобы гарантировать, что в конце игры количества конфет у мальчиков отличаются не более чем на k? (Во время игры мальчики конфеты не едят.)

2. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}$, $1+2\sqrt{2}$, $\ldots$, $1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

3. Саша поставил фишку в одну из точек координатной плоскости. За одну операцию разрешается переместить фишку, расположенную в точке с координатами (a_i, b_i), в другую точку (a_{i+1}, b_{i+1}), если уравнение прямой, соединяющей эти точки, имеет вид $y = a_i x + c_i$ для некоторого c_i (где i — номер операции). Может ли после нескольких таких операций фишка вернуться в исходную точку?

4. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Из точки A опустили перпендикуляры AP и AQ на продолжения отрезков BO и CO за точку O. Окружность с центром T, проходящая через точки P и Q, касается отрезка BC. Докажите, что $TO \parallel BC$.

5. На координатной плоскости вершины выпуклого четырехугольника имеют целые координаты и лежат на графике многочлена с целыми коэффициентами. Пусть диагонали этого четырехугольника перпендикулярны.

(а) Докажите, что диагонали параллельны прямым $y = x$ и $y = -x$.

(б) Докажите, что диагонали равны между собой.

6. На олимпиаду приехало несколько участников из n регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.