

Алгебраический разбой

1. Даниил хочет придумать два вещественных числа S и P , а после этого расставить по окружности шесть попарно различных вещественных чисел так, чтобы для любых трех подряд идущих по окружности чисел было выполнено хотя бы одно из двух условий:

- 1) сумма этих трех чисел равна S ;
- 2) произведение этих трех чисел равно P .

Выясните, осуществимо ли желание Даниила.

2. Приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(x))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0)P(1) = 0$.
3. Числа от 1 до 2025 расположены по кругу в порядке возрастания. Для любых трех последовательных чисел i, j, k рассматривается многочлен $(x-i)(x-j)(x-k)$. Обозначим за $S(x)$ сумму всех таких многочленов. Докажите, что у него есть целый корень.
4. Действительные числа a, b, c таковы, что $a > b > c$ и выполнено равенство

$$\frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{c-a} + \frac{c-a}{a-b} = -3.$$

Докажите, что $(b-c)^3 > 4(a-b)^3$.

5. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трёхчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трёхчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго.
6. Найдите наибольшее натуральное n , такое что существуют n многочленов с вещественными коэффициентами, сумма любых двух которых не имеет корня, а сумма любых трех — имеет.
7. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geq 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.
8. Пусть S — 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10 000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых принадлежит множеству S . К каждой из 1 000 000 отмеченных точек (x, y, z) прикроем шарик с написанным на нём числом

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}.$$

На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?