Клетки и графы

1. На тренинг по личностному росту пришло 30 человек. Оказалось, что любых пятерых можно посадить за круглый стол с условием, чтобы рядом сидящие были знакомы. Какое минимальное количество пар знакомых может присутствовать на тренинге?

2. Клетки доски $(2m + 1) \times (2n + 1)$ красятся в два цвета — белый и черный. Единичная клетка строки (столбца) называется *доминирующей по строке* (по столбцу), если более половины клеток этой строки (этого столбца) имеет одинаковый цвет с этой клеткой. Докажите, что по крайней мере $m + n + 1$ клеток доски одновременно доминируют по строке и по столбцу.

3. В графе степень каждой вершины равна 3. Докажите, что все его рёбра можно раскрасить в два цвета так, чтобы из каждой вершины выходили рёбра обоих цветов.

4. В таблице $n \times n$ все клетки изначально белые. За один ход можно выбрать 5 подряд идущих клеток (в одной строке или в одном столбце) и перекрасить их (белая клетка становится чёрной, а чёрная — белой). При каких n можно добиться того, чтобы в таблице осталась ровно одна белая клетка?

5. Дан граф, в котором любые две вершины можно соединить маршрутом из не более 100 рёбер. Выяснилось, что любые две вершины можно соединить маршрутом из чётного числа рёбер. Для какого наименьшего натурального k можно с гарантией утверждать, что любые две вершины можно соединить маршрутом из чётного числа рёбер, не превосходящего k?
(*Маршрут* — любая последовательность вершин графа, в которой любые два соседних элемента смежны. Маршрут может проходить через вершину или ребро более одного раза.)

6. Для какого наибольшего k можно раскрасить клетки таблицы $30 \times k$ в 15 цветов так, чтобы не нашлось двух строк и двух столбцов, на пересечении которых все 4 клетки одного цвета?