

## Геометрические неравенства

1. Дана равнобедренная трапеция  $ABCD$  в которой основание  $AD$  больше основания  $BC$ . На её описанной окружности отмечена такая точка  $E$ , что  $AD \perp BE$ . Докажите, что  $AE + BC > DE$ .
2. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BE$  и  $CF$ . Точка  $I$  — центр вписанной окружности, точка  $J$  — центр вневписанной окружности со стороны вершины  $A$ . Докажите, что  $IJ > EF$ .
3. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Известно, что

$$\angle ABD + \angle ACD > \angle BAC + \angle BDC.$$

Докажите, что  $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$ .

4. Докажите, что расстояние между серединой стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  и серединой дуги  $BAC$  его описанной окружности не меньше  $AB/2$ .
5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели медиану  $AM$ , высоту  $AH$  и биссектрису  $AL$ . Оказалось, что точки  $B, H, L, M, C$  лежат на прямой  $BC$  именно в таком порядке, причём  $LH < LM$ . Докажите, что  $BC > 2AL$ .
6. Точка  $M$  внутри треугольника  $ABC$  такова, что  $\angle ABM = \angle ACM$ , точка  $N$  симметрична  $M$  относительно середины стороны  $BC$ . Докажите, что

$$BM \cdot CM + AM \cdot AN \geq 2S_{ABC}.$$

7. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.