Процессы и игры

1. На шахматной доске 8×8 отмечено 12 клеток. Докажите, что можно выбрать 4 столбца и 4 строки, чтобы в объединении этих строк и столбцов содержались все отмеченные клетки.

2. Маша и Таня выбирают натуральное число k играют в следующую игру на клетчатой доске 9×9. На каждом своём ходу Маша выбирает пустой квадратик 1×1 и пишет в него 0. Затем Таня k раз выбирает пустые квадратики и пишет в каждом по единичке. Если после какого-то хода сумма чисел в каждой строке и в каждом столбике нечётна, выигрывает Таня. Если табличка заполнена до конца, побеждает Маша. При каком минимальном k побеждает Таня?

3. Клетки доски $(2m+1) \times (2n+1)$ красятся в два цвета — белый и черный. Единичная клетка строки (столбца) называется *доминирующей по строке* (по столбцу), если более половины клеток этой строки (этого столбца) имеет одинаковый цвет с этой клеткой. Докажите, что по крайней мере $m+n+1$ клеток доски одновременно доминируют по строке и по столбцу.

4. Паша и Гриша играют в игру. Они по очереди красят непокрашенные стороны 2025-угольника таким образом, чтобы никакие две соседние стороны не были покрашены в один цвет. Проигрывает тот, кто последним ввёл в игру новый цвет. Начинает Паша. Кто выиграет при правильной игре?

5. В таблице $n \times n$ все клетки изначально белые. За один ход можно выбрать 5 подряд идущих клеток (в одной строке или в одном столбце) и перекрасить их (белая клетка становится чёрной, а чёрная — белой). При каких n можно добиться того, чтобы в таблице осталась ровно одна белая клетка?

6. Существует ли натуральное число n, для которого можно покрасить все клетки доски $n \times n$ в три цвета так, чтобы все цвета встречались, не было двух одноцветных соседних клеток и все клетки любых двух цветов составляли связное множество клеток?

7. Алиса и Базилио играют в следующую игру; из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?