# Разнобой по ТЧ

1. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 100$. Игроки $A$ и $B$ играют в следующую игру: они по очереди выбирают число с доски и стирают его. Начинает игрок $A$. Если после хода игрока (после того, как он стёр число с доски) сумма стёртых чисел не может быть выражена как разность двух точных квадратов, то этот игрок проигрывает. В противном случае игра продолжается. У какого игрока существует выигрышная стратегия?

2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. По окружности расположены $n$ камней, на каждом из которых сидит лягушка. На камнях в некотором порядке написаны числа $1, 2, \ldots, n$. По сигналу каждая лягушка, смотрит на число $i$, написанное на камне, на котором она сидит, и прыгает на $i$ позиций по часовой стрелке по окружности. Определите все значения $n$, для которых можно так расставить числа $1, 2, \ldots, n$ по камням, чтобы после сигнала все лягушки оказались на разных камнях.

3. Найдите все натуральные $(m, n)$ такие, что
$$11^n + 2^n + 6 = m^3$$

4. Для натурального числа $n \geqslant 2$ все его делители выписали в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Оказалось, что разности $d_2 - d_1$, $d_3 - d_2, \ldots, d_k - d_{k-1}$ - это числа $1, 3, \ldots, 2k-3$, расставленные в некотором порядке. Чему может быть равно $n$?

5. Существуют ли натуральные числа $a, b, c$, большие $10^{10}$ и такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2025?

6. Найдите все наборы натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ такие, что
$$x_{i+2}^2 = \text{НОК}(x_{i+1}, x_i) + \text{НОК}(x_i, x_{i-1})$$
при $i = 1, 2, \ldots, 20$, где $x_0 = x_{20}$, $x_{21} = x_1$, $x_{22} = x_2$.

7. На доске написано положительное трёхзначное число. Каждую секунду число $n$ на доске заменяется на $n + \frac{n}{p}$, где $p$ — наибольший простой делитель $n$. Докажите, что либо через 999 секунд, либо через 1000 секунд число на доске станет степенью двойки.

8. Пусть $n \geqslant 2$ — целое число, и пусть $A_n$ — множество
$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant k < n\}.$$
Найти наибольшее положительное целое число, которое нельзя представить в виде суммы одного или нескольких (не обязательно различных) элементов множества $A_n$.