Геометрический разнобой

1. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке A_1. На продолжении отрезков A_1B и A_1C за точки B и C выбраны точки X и Y такие, что $A_1X = A_1Y = A_1A$. Докажите, что прямая XY проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Окружности ω_1 и ω_2 касаются Ω внутренним образом и касаются отрезков AB и CD. Докажите, что прямая, проходящая через середины дуг AB и CD окружности Ω, проходит через точки пересечения ω_1 и ω_2.

3. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F, причём E лежит между B и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямые AE и DF касаются окружности (AOD). Докажите, что они касаются и окружности (EOF).

4. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T, покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T.

5. На продолжении стороны BC остроугольного треугольника ABC за точку C выбрана точка X, на продолжении стороны CA за точку A – точка Y, а на продолжении стороны AB за точку B – точка Z так, что треугольники ABC и XYZ подобны (именно с таким соответствием точек). Докажите, что ортоцентр треугольника XYZ не зависит от выбора точек X, Y, Z.

6. В треугольнике ABC проведена высота AH, медиана CM пересекает его описанную окружность в точке X. Точка D такова, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом. Докажите, что точки C, D, H, X лежат на одной окружности.

7. На высотах, проведённых из вершин A, B, C остроугольного треугольника ABC, выбраны точки D, E, F соответственно так, что углы BDC, AEC, AFB прямые. Докажите, что существует окружность, которая касается прямых AE, AF, BD, BF, CD, CE.

8. Окружность ω лежит внутри окружности Ω и касается её внутренним образом в точке T. Пусть XY – переменная хорда окружности Ω, касающаяся ω. Обозначим X' и Y' середины дуг TY и TX, не содержащих точек X и Y соответственно. Докажите, что всевозможные прямые $X'Y'$ проходят через фиксированную точку.