Гамильтоновы пути и циклы

1. На утренник в детском саду пришло n детей. Любые два ребёнка либо дружат, либо незнакомы. Обозначим через $\deg A$ число друзей ребёнка A.
(а) Докажите, что если для любых двух незнакомых детей A и B выполнено неравенство $\deg A + \deg B \geqslant n$, то можно рассадить всех детей за круглый стол так, чтобы любые два рядом сидящих ребёнка дружили.
Посадите всех детей за стол как-то и попробуйте улучшить рассадку.
(б) Докажите, что если для любых двух незнакомых детей A и B выполнено неравенство $\deg A + \deg B \geqslant n - 1$, то можно поставить всех детей в ряд так, чтобы любые два рядом стоящих ребёнка дружили.

Утверждение первой задачи называется **теорема О́ре**. Из неё следует более слабая **теорема Дира́ка**: если в графе на n вершинах степень каждой вершины не меньше $\frac{n}{2}$ (или не меньше $\frac{n-1}{2}$), то в графе есть гамильтонов цикл (или гамильтонов путь).

2. В колоде n карт, на каждой с лицевой стороны написано число от 1 до n (на разных картах — разные числа). Петя выложил эти карты в ряд лицевой стороной вниз. Разрешается выбрать любые две карты в ряду и спросить у Пети, соседние ли числа написаны на выбранных карточках, и Петя честно ответит. Какое наименьшее число вопросов потребуется, чтобы гарантированно услышать хотя бы один ответ «да»?

3. **(а)** В противоположных угловых клетках доски 8×8 стоят две фишки: красная и синяя. За одну операцию можно передвинуть одну из фишек в соседнюю по стороне свободную клетку. Докажите, что такими операциями нельзя получить все возможные расположения фишек ровно по одному разу.
(б) Операции из предыдущего пункта можно делать бесплатно, но кроме этого можно, заплатив одну монету, сходить фишкой по диагонали либо перепрыгнуть через другую фишку (если она стоит в соседней по стороне клетке). Какое наименьшее число монет нужно потратить, чтобы получить все возможные расположения фишек ровно по одному разу?

4. (*RMM-2026*). На плоскости нарисован треугольник площади 1. Петя 99 раз делает следующее: выбирает в текущей триангуляции какой-нибудь треугольник $\triangle XYZ$, отмечает в нём точку P и разбивает его на три треугольника $\triangle PXY$, $\triangle PYZ$, $\triangle PZX$, получая новую триангуляцию. Для какого наибольшего S можно гарантированно найти в получившейся триангуляции три различных треугольника $\triangle T_1$, $\triangle T_2$, $\triangle T_3$ с суммой площадей не меньше S таких, что $\triangle T_2$ граничит по стороне с $\triangle T_1$ и с $\triangle T_3$?

5. В графе все вершины имеют степень 3. Известно, что количество раскрасок рёбер данного графа в три цвета таких, что в каждой вершине сходится три разноцветных ребра, не делится на 4. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

6. Натуральное число n называется *пропрыгиваемым*, если кузнечик может выбрать стартовую клетку клетчатой полоски $1 \times n$ и, прыгая каждый раз на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону (то есть перелетая через 7, 8 или 9 клеток), побывать во всех клетках полоски ровно по одному разу. Докажите, что существует непропрыгиваемое n, большее 50.

7. Для произвольного графа G обозначим через G^d на тех же вершинах, в котором две различные вершины x и y соединены ребром в том и только в том случае, когда в графе G расстояние между этими вершинами не превосходит d. Докажите, что если граф G связен и в нём хотя бы 3 вершины, то в графе G^3 существует гамильтонов цикл.

8. В графе, все степени вершин которого равны 3, нашёлся гамильтонов цикл. Докажите, что в нём можно найти ещё один гамильтонов цикл.